9. מודל הקבוצות הבנויות

הגדרה 9.1 : **מודל הקבוצות הבנויות** של Gödel, הוא המודל הקטן ביותר של תורת הקבוצות.
המודל, L, הוא גבול של הירכיה המוגדרת על כל הסודרים, כלומר $L=\bigcup_{\alpha\in On} L_\alpha$, באשר :

1. $L_0 := \phi$
2. סודרים גבוליים : $L_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$
3. סודרים עוקבים :

$$L_{\alpha+1} := \left\{ X\subseteq L_\alpha \,\middle|\, \exists\varphi\in Form, \exists n, \exists a_1,...,a_n, X=\left\{x\in L_\alpha \,\middle|\, (L_\alpha,\in)\vDash\varphi(x,a_1,...,a_n)\right\}\right\}$$

הגדרה 9.2 : כל קבוצה ב- L נקראת **קבוצה בנויה**, והאקסיומה $V=L$ היא הקביעה כי כל קבוצה היא בנויה.

הגדרה 9.3 : **עקרון יהלום** $\lozenge(S)$: נניח סדרה עולה ורציפה של קבוצות בנות-מניה $\left\langle T_\alpha \,\middle|\, \alpha<\omega_1\right\rangle$, שגבולה T וקבוצת שבת $S\subseteq\omega_1$. אז קיימת **סדרת יהלום** $\left\langle S_\gamma\subseteq T_\gamma \,\middle|\, \gamma\in S\right\rangle$, כך שלכל $X\subseteq T$, X **מנוחשת על קבוצת שבת**, כלומר $\left\{\gamma\in S \,\middle|\, X\bigcap T_\gamma = S_\gamma\right\}$ היא שבת ב- ω_1.

משפט 9.4 (Jensen) : $V=L$ גורר עקרון יהלום $\lozenge(S)$ לכל קבוצת שבת, S.
ללא הוכחה! נובע בעיקר מכך שלכל תת-מודל אלמנטרי $H\prec L$ שאינו L, מתקיים $\exists\alpha.H=L_\alpha$.

נדגים תוצאה קלאסית הנובעת מעקרון יהלום (תוצאה 9.5 מוצגת להמחשה ואינה חשובה להמשך) :
משפט 9.5 : $\lozenge(\omega_1)\rightarrow 2^{\aleph_0}=\aleph_1$.
הוכחה : לכל $\alpha<\omega_1$ יהי $T_\alpha=:\alpha$, ותהי $S=:\omega_1\setminus\omega$, סל״ח ובפרט ממשפט 7.7, קבוצת שבת.
נשים לב כי לכל $\alpha\in S$ מתקיים כי T_α בת-מניה, וכי $\lozenge(\omega_1)$ גורר $\lozenge(S)$ עבור S הנ״ל (מסקנה 7.8).
אז מתקבלת סדרת היהלום $\Gamma=\left\langle T_\alpha\subseteq\alpha \,\middle|\, \omega\le\alpha<\omega_1\right\rangle$.
יהי $X\subseteq\omega$, אז קיים $\gamma\in S$ כך ש- $X\bigcap\gamma=T_\gamma$, אך $\omega\le\gamma$, לכן $X=T_\gamma$, ומכאן כי $P(\omega)\subseteq\Gamma$,
כלומר $\aleph_1=\left|\Gamma\right|\le\left|P(\omega)\right|=2^{\aleph_0}$, ביחד עם משפט קנטור נקבל $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, כנדרש.

הערה 9.6 : נשים לב כי אם $f:A\rightarrow B$ פונקציה, אז $f\subset A\times B$ ע״י ההצגה $\left\{(a,f(a)) \,\middle|\, a\in A\right\}$.

משפט 9.7 : נניח $V=L$. תהי B גבולה של סדרה עולה ורציפה של קבוצות בנות-מניה $\left\langle B_\alpha \,\middle|\, \alpha<\omega_1\right\rangle$, ו- S קבוצת שבת כלשהי. אז קיימת משפחת פונקציות $\left\langle f_\gamma : B_\gamma\rightarrow B_\gamma\times\mathbb{Z} \,\middle|\, \gamma\in S\right\rangle$, כך שלכל פונקציה $\lambda:B\rightarrow B\times\mathbb{Z}$ המקיימת $\forall\gamma.\lambda[B_\gamma]\subseteq B_\gamma\times\mathbb{Z}$, קיים $\gamma\in S$ כך ש- $\lambda|_{B_\gamma}=f_\gamma$.
הוכחה : יהי $T_\alpha := B_\alpha\times(B_\alpha\times\mathbb{Z})$ ו- $T:=B\times(B\times\mathbb{Z})$ ותהי $\left\langle S_\gamma\subseteq T_\gamma \,\middle|\, \gamma\in S\right\rangle$ סדרת יהלום.
לכל $\gamma\in S$, אם S_γ היא פונקציה ו- $dom(S_\gamma)=B_\gamma$, תהי $f_\gamma =: S_\gamma$, אחרת תהי f_γ פונקציה כלשהי מ- B_γ ל- $B_\gamma\times\mathbb{Z}$. נטען כי $\left\langle f_\gamma \,\middle|\, \gamma\in S\right\rangle$ שעתה בנינו – כנדרש :
אכן, תהי $\lambda:B\rightarrow B\times\mathbb{Z}$ פונקציה כבנתון, אז $\lambda\subseteq B\times(B\times\mathbb{Z})$ ולכן קיים $\gamma\in S$ כך ש- $\lambda\bigcap T_\gamma=S_\gamma$, מההנחה על λ נובע כי $\lambda\bigcap T_\gamma=\lambda|_{B_\gamma}$ ובפרט S_γ היא פונקציה ולכן $\lambda|_{B_\gamma}=f_\gamma$.