8. הכללת תנאי Pontryagin לחבורות שאינן בנות-מניה

הגדרה 8.1 : חבורה A היא **$\aleph_1$-חופשית** אמ"מ כל תת-חבורה בת-מניה שלה היא חופשית.

הגדרה 8.2 : נניח A חבורה $\aleph_1$-חופשית, ו- $A \geq B$. נאמר כי B **$\aleph_1$-טהורה** אם A/B $\aleph_1$-חופשית.

מסקנה 8.3 : כל חבורת- W היא $\aleph_1$-חופשית.
הוכחה : 6.4 + 5.2.

הגדרה 8.4 : נאמר על חבורה A כי היא **מקיימת את תנאי Chase** אם A היא $\aleph_1$-חופשית, וכל תת-חבורה בת-מניה שלה מוכלת בתת-חבורה בת-מניה $\aleph_1$-טהורה.

משפט 8.5 : נניח חבורה A מעוצמה $\aleph_1$.
A מקיימת את תנאי Chase אמ"מ היא גבול של סדרה עולה ורציפה של חבורות חופשיות בנות-מניה $\langle A_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$, כך ש- $A_0 = 0$, ולכל $\omega_1 > \alpha$ החבורה $A_{\alpha+1}$ היא $\aleph_1$-טהורה.

הוכחה : $\Leftarrow$ נניח סידור $A = \{a_\alpha | \alpha < \omega_1\}$. נבנה את $\langle A_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ באינדוקציה על $\omega_1 > \alpha$:
בסיס האינדוקציה : $A_0 = 0$.
שלב גבולי α : $A_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$. (A_α כנדרש : איחוד בן-מניה של קבוצות בנות-מניה הוא בן-מניה).
שלב עוקב $\alpha = \beta + 1$: תהי A_α חבורה בת-מניה $\aleph_1$-טהורה המכילה את $\langle A_\beta \cup \{a_\beta\} \rangle$ (אשר קיומה מובטח מתנאי Chase).
נשים לב כי החבורות שבנינו באינדוקציה הן אכן חופשיות, שכן הן בנות-מניה, והן תת-חבורות של A שהיא $\aleph_1$-חופשית. כמו-כן, הבניה מבטיחה כי $\bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha = A$.
$\Rightarrow$ אם A מהווה גבול של סדרה כנ"ל, ו- $A \geq B$ תת-חבורה בת-מניה, אז מסדירות $\aleph_1$, קיים סודר $\omega_1 > \alpha$ כך ש- $B \subseteq A_{\alpha+1}$ $\aleph_1$-טהורה וחופשית, כנדרש.

משפט 8.6 : נניח A חבורה מעוצמה $\aleph_1$ המהווה גבול של שתי-סדרות $\langle A_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle, \langle A_\alpha' | \alpha < \omega_1 \rangle$, המעידות על כך כי A מקיימת תנאי Chase, ותהי p תכונה כלשהי (פרדיקט).
__אז__ $E = \{\alpha < \omega_1 | p(A_\alpha)\}$ שבת אמ"מ $E' = \{\alpha < \omega_1 | p(A_\alpha')\}$ שבת.
הוכחה : יהי $C \subseteq \omega_1$ סל"ח המתקבל ממשפט 7.10, אז $E \cap C = E' \cap C$.
ממסקנה 7.8 נובע כי E, E' שבת אמ"מ $E \cap C, E' \cap C$ שבת. כנדרש.

<u>משפט 8.7</u> : נניח A חבורה מעוצמה $\aleph_1$ המקיימת תנאי Chase. $\Gamma =: \left\langle A_\alpha \middle| \alpha < \omega_1 \right\rangle$ סדרת חבורות כבמשפט 8.5 ותהי $E \subseteq \omega_1$ קבוצת הסודרים (הגבוליים) α כך ש- A_α אינה $\aleph_1$-טהורה ב- A, <u>אז</u> A חופשית אמ"מ E איננה קבוצה שבת (כלומר, E קבוצה ממידה 0).

<u>הוכחה</u> : ממשפט 8.6 נובע כי הטענה מנוסחת היטב.

$\Rightarrow$ נניח E איננה קבוצת שבת, ותהי $f:\omega_1 \to \omega_1$ פונקציה נורמלית כך ש- $\operatorname{Im} f \bigcap E = \phi$.

נגדיר סדרה עולה ורציפה שגבולה A באופן הבא : $\left\langle B_\alpha \middle| \alpha < \omega_1, B_\alpha = A_{f(\alpha)} \right\rangle$ (הסדרה אכן עולה, רציפה, ובאורך $\aleph_1$, שכן $\left\langle A_\alpha \middle| \alpha < \omega_1 \right\rangle$ עולה ורציפה ובנוסף $\operatorname{Im} f$ סל"ח).

מהגדרת E והסדרה נובע כי לכל $\alpha < \omega_1$, B_α היא $\aleph_1$-טהורה ב- A, כלומר A/B_α היא $\aleph_1$-חופשית, ומכיוון ש- $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ תת-חבורה בת-מניה שלה, נקבל כי $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ חופשית, ומטענה 4.2.1 נסיק כי A חופשית.

$\Leftarrow$ תהי A חופשית עם בסיס X, נראה כי A_α היא $\aleph_1$-טהורה כמעט לכל α.

נבנה פונקציה נורמלית $f:\omega_1 \to \omega_1$ וסדרה עולה ורציפה $\left\langle X_\alpha \subset X \middle| \alpha < \omega_1 \right\rangle$, כך ש- X_α בסיס ל- $A_{f(\alpha)}$. נשים לב כי אז יתקבל ש- $\left\{ x + A_{f(\alpha)} \middle| x \in X \setminus X_\alpha \right\}$ בסיס ל- $A/A_{f(\alpha)}$, כלומר המנה היא חופשית ואזי $A_{f(\alpha)}$ היא $\aleph_1$-טהורה ב- A ו- $E \bigcap \operatorname{Im} f = \phi$ ונקבל ש- E אינה שבת.

הבניה באינדוקציה על $\delta < \omega_1$:

בסיס האינדוקציה : $X_0 = \phi$, $f(0) = 0$.

הנחת האינדוקציה : נניח כי הפונקציה וסדרת הבסיסים הוגדרו לכל $\alpha < \delta$.

שלב גבולי δ : יהי $X_\delta := \bigcup\limits_{\alpha<\delta} X_\alpha$ ו- $f(\delta) := \sup\limits_{\alpha<\delta} f(\alpha)$. בוודאי f רציפה, כמו-כן, מרציפות הסדרה המקורית Γ נקבל כי X_δ בסיס ל- $A_{f(\delta)} = \bigcup\limits_{\alpha<\delta} A_{f(\alpha)}$. (בדומה לשלב גבולי בהוכחת 4.2).

שלב עוקב $\delta = \beta + 1$: X_β בת-מניה בעוד X איננה, לכן קיימת תת-קבוצה בת-מניה של X המכילה ממש את X_β, נסמנה ב- Y_0. Γ סדרה שגבולה A, לכן קיים סודר גדול מ- $f(\beta)$, נסמנו ב- τ_0, כך ש- $\left\langle Y_0 \right\rangle \subseteq A_{\tau_0}$, כעת נמצא $Y_1 \subset X$ בת-מניה כך ש- $A_{\tau_0} \subseteq \left\langle Y_1 \right\rangle$, וכן הלאה באינדוקציה על הטבעיים נבנה סדרה עולה של סודרים $\left\langle \tau_n \middle| n < \omega \right\rangle$ וקבוצות בסיס בנות-מניה $\left\langle Y_n \subset X \middle| n < \omega \right\rangle$ כך שלכל $n < \omega$ מתקיים $\left\langle Y_n \right\rangle \subseteq A_{\tau_n} \subseteq \left\langle Y_{n+1} \right\rangle$. לבסוף נגדיר $X_\delta := \bigcup\limits_{n<\omega} Y_n$ ו- $f(\delta) := \sup\limits_{n<\omega} \tau_n$, ונבחין כי X_δ אכן בסיס ל- $A_{f(\delta)}$. גם הפעם הבדיקה דומה לזו של השלב הגבולי בהוכחת 4.2.