7. פונקציות נורמליות וקבוצות שבת

<u>הגדרה 7.1</u> : קבוצה $C \subseteq \omega_1$ תקרא **סגורה**, אמ״מ לכל סדרה $\langle x_n \in C \rangle_{n<\omega}$, מתקיים $\lim_{n\to\omega} x_n \in C$.

<u>הגדרה 7.2</u> : קבוצת $C \subseteq \omega_1$ תקרא **לא-חסומה** אמ״מ לכל $\alpha < \omega_1$ קיים $\beta \in C$ כך ש- $\alpha < \beta$.

<u>הגדרה 7.3</u> : קבוצה $C \subseteq \omega_1$ תקרא **סל״ח** אמ״מ היא סגורה ולא-חסומה.

<u>הגדרה 7.4</u> : קבוצה $E \subseteq \omega_1$ תקרא **שבת** אמ״מ לכל סל״ח $C \subseteq \omega_1$, $E \bigcap C \neq \phi$.

<u>הגדרה 7.5</u> : פונקציה $f:\omega_1 \to \omega_1$ תקרא **נורמלית** אמ״מ היא עולה ממש $\left(\alpha > \beta \Leftarrow f(\alpha) > f(\beta)\right)$ ורציפה, כלומר לכל סודר גבולי δ, $f(\delta) = \sup\limits_{\alpha<\delta} f(\alpha)$.

<u>משפט 7.6</u> : $C \subseteq \omega_1$ סל״ח אמ״מ קיימת פונקציה נורמלית $f:\omega_1 \to \omega_1$ כך ש- $\operatorname{Im} f = C$.

<u>הוכחה</u> : טריוואלי. די באבחנה כי העובדה ש- C אינה חסומה מבטיחה כי $|C| = \aleph_1$, ואזי f היא הפונקציה המעידה על כך כי $Otp(C) = \omega_1$.

<u>משפט 7.7</u> : נניח $C_1, C_2 \in P(\omega_1)$ סל״חים, <u>אז</u> $C_1 \bigcap C_2$ סל״ח.

<u>הוכחה</u> : סגירות : נניח סדרה $\langle x_n \in C_1 \bigcap C_2 | n < \omega \rangle$, אז מההנחה על C_1, C_2 מתקיים $\lim_{n\to\omega} x_n \in C_1$ וגם $\lim_{n\to\omega} x_n \in C_2$ ולכן $\lim_{n\to\omega} x_n \in C_1 \bigcap C_2$.

אי-חסימות : יהי $\alpha \in \omega_1$, אז קיים $x_0 \in C_1$ כך ש- $\alpha < x_0$, וקיים $y_0 \in C_2$ כך ש- $x_0 < y_0$.

נבנה באינדוקציה לכל $n < \omega$ $x_{n+1} \in C_1$ כך ש- $y_n < x_{n+1}$ ו- $y_{n+1} \in C_2$ כך ש- $x_{n+1} < y_{n+1}$.

אז $\lim_{n\to\omega} x_n = \lim_{n\to\omega} y_n$, נסמן גבול זה ב- β, ונקבל $\alpha < \beta \in C_1 \bigcap C_2$ כנדרש.

<u>מסקנה 7.8</u> : יהי $D \subseteq \omega_1$ סל״ח, ו- $E \subseteq \omega_1$ כלשהי. <u>אז</u> E קבוצת שבת אמ״מ $E \bigcap D$ קבוצת שבת.

<u>הוכחה</u> : $\Leftarrow$ נניח E שבת ו- $C \subseteq \omega_1$ סל״ח כלשהו, אז ממשפט 7.7, $C' =: D \bigcap C$ סל״ח, ולכן $(E \bigcap D) \bigcap C = E \bigcap C' \neq \phi$.

$\Rightarrow$ יהי $C \subseteq \omega_1$ סל״ח, אז מההנחה $(E \bigcap D) \bigcap C \neq \phi$ ובפרט $E \bigcap C \neq \phi$.

<u>7.9 דיון</u> : אינטואיטיבית, ניתן לחשוב על פונקציית מידה $\mu : P(\omega_1) \to [0,1]$.
סל״ח הן קבוצות ממידה 1, קבוצות שבת הן קבוצות ממידה > 0, וקבוצות שאינן שבת הן קבוצות ממידה 0 (שכן הן מוכלות במשלים של קבוצה ממידה 1).
במושגים אלו, משפט 7.7 אומר כי חיתוך של קבוצות ממידה 1 היא קבוצה ממידה 1, משפט 7.8 קובע כי חיתוך של קבוצה ממידה חיובית עם קבוצה ממידה מלאה היא קבוצה ממידה חיובית.

המשפט הבא מציג תנאי מספיק לכך ששתי סדרות בעלות אותו גבול יהיו שוות כמעט בכל מקום.

<u>משפט 7.10</u> : נניח A חבורה מעוצמה $\aleph_1$ המהווה גבול של שתי סדרות עולות-ממש ורציפות,
$\langle A_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle, \langle A_\alpha' | \alpha < \omega_1 \rangle$, כאשר $A_0 = A_0' = 0$,
<u>אז</u> קיים סל״ח $C \subseteq \omega_1$ כך ש- $\forall \alpha \in C . A_\alpha = A_\alpha'$.

<u>הוכחה</u> : נבנה באינדוקציה פונקציה נורמלית $f : \omega_1 \to \omega_1$ כך ש- $\forall \alpha \in \omega_1 . A_{f(\alpha)} = A_{f(\alpha)}'$.
בסיס האינדוקציה : $f(0) := 0$, ואכן $A_{f(0)} = A_{f(0)}'$.
הנחת אינדוקציה : נניח כי לכל $\alpha > \beta$, $A_{f(\beta)} = A_{f(\beta)}'$.
שלב גבולי α : יהי $f(\beta) := \sup_{\beta<\alpha} f(\beta)$, אז בוודאי f רציפה, ומהנחת אינדוקציה, ורציפות שתי הסדרות מקבלים $A_{f(\alpha)} = A_{f(\alpha)}'$.
שלב עוקב $\alpha = \beta + 1$: נסמן $B := A_{f(\beta)}$. מההנחה על הסדרות, קיים $f(\beta) < x_0$ כך ש- $B \subset A_{x_0}$, ובאופן דומה קיים $x_0 < y_0$ כך ש- $A_{x_0} \subset A_{y_0}'$. נבנה באינדוקציה לכל $n < \omega$ סדרה $\langle x_n, y_n | n < \omega \rangle$ כך ש- $y_n < x_{n+1}$ ו- $A_{y_n}' \subset A_{x_{n+1}}$, ו- $x_{n+1} < y_{n+1}$ ו- $A_{X_{n+1}} \subset A_{y_{n+1}}'$.
אז $\lim_{n\to\omega} x_n = \lim_{n\to\omega} y_n$, ונגדיר את $f(\alpha)$ להיות גבול זה (נשים לב כי $f(\alpha)$ אכן קטן מ- ω_1, שכן $\aleph_1$ הוא מונה סדיר).
מרציפות הסדרות מתקיים $A_{f(\alpha)} = A_{f(\alpha)}'$, ולכן הבניה כנדרש.