## 6. חבורות-$W$ בנות-מניה

<u>הגדרה 6.1</u> : נאמר על חבורה $A$ כי היא **מקיימת את תנאי Pontryagin** אם $A$ היא חסרת-פיתול, וכל תת-חבורה נוצרת-סופית שלה מוכלת בתת-חבורה טהורה נוצרת-סופית.

<u>משפט 6.2</u> : כל חבורת-$W$ בת-מניה מקיימת את תנאי Pontryagin.
<u>הוכחה</u> : תהי $A$ חבורת-$W$ בת-מניה, אז מטענה 5.3 היא חסרת-פיתול. נראה כי כל תת-חבורה נוצרת-סופית שלה מוכלת בתת-חבורה טהורה נוצרת-סופית.
נניח בשלילה קיימת $A \geq B_0$ נוצרת-סופית עם קבוצת יוצרים $\{s_1,...,s_k\}=S$ אשר אינה מוכלת בתת-חבורה טהורה נוצרת-סופית, בפרט נובע כי $B =: \{x\in A | nx \in B_0\}$, הסגור הטהור של $B_0$, אינה נוצרת-סופית.
מכאן כי $B$ היא גבול של סדרה עולה-ממש של חבורות חסרות-פיתול נוצרות-סופית $\langle B_n | n<\omega \rangle$.
יהי $\omega > n$, נשים לב כי מטענה 3.2, $B_n, B_{n+1}$ הן חופשיות, ו- $B_{n+1}/B_n$ אינה חבורת-$W$ שכן, המנה היא חבורת-פיתול: יהי $x\in B_{n+1}\setminus B_n$, בפרט $x\in B$ וקיים $m\in\mathbb{N}^+$ כך ש- $mx\in B_0$ ובפרט $mx\in B_n$.
נבנה סדרה עולה-ממש ורציפה של חבורות $\langle C_n | n<\omega\rangle$, כך שלכל $\omega>n$, $C_n$ היא חבורת-$(B_n,\mathbb{Z})$.
נניח $\Gamma =: \{f_n | 0<n<\omega\}$ משפחת כל הפונקציות מ- $S$ ל- $S\times\mathbb{Z}$. (ראו הערה בתחתית העמוד)
נבנה את הסדרה באינדוקציה על $\omega > n$. בסיס האינדוקציה : $C_0 := B_0 \oplus \mathbb{Z}$.
הנחת אינדוקציה : נניח כי $C_n$ הוגדרה, נרצה להגדיר את $C_{n+1}$.

- אם $f_n$ ניתנת להרחבה למונומורפיזם מפצל $\lambda : B_n \to C_n$ עבור פונקציית ההטלה $\pi : C_n \to B_n$, תהי $C_{n+1}$ המתקבלת מטענה 5.6.2, כלומר חבורת-$(B_{n+1},\mathbb{Z})$ אשר לא ניתן להרחיב את $\lambda : B_n \to C_n$ למונומורפיזם מפצל עבור ההטלה $\pi : C_{n+1} \to B_{n+1}$.
- אחרת. $B_n$ היא חופשית ולכן קיים מונומורפיזם מפצל $\lambda : B_n \to C_n$ (טענה 3.3), ותהי $C_{n+1}$ חבורת-$(B_{n+1},\mathbb{Z})$, כמקודם, כלומר זו המתקבלת מטענה 5.6.2.

לבסוף, תהי $C =: \bigcup_{n<\omega} C_n$, ואפימורפיזם ההטלה $\pi : C \to B$.

$B$ היא חבורת-$W$ כתת-חבורה של $A$, ומתקיים $Ker\pi = \{(0,n) | n\in\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$, ולכן קיים מונומורפיזם מפצל $\lambda : B \to C$, ובפרט לכל $\omega>n$ $\lambda|_{B_n}$ הוא מונומורפיזם מפצל עבור $\pi|_{C_n}$.
יהי $\omega > n$ כך ש- $\lambda|_S = f_n$, אז מהבניה, $\lambda|_{B_n} : B_n \to C_n$ אינו ניתן להרחבה למונומוריפזם מפצל עבור $\pi|_{C_{n+1}}$. סתירה!

---

הערה : תהי $C$ חבורת-$(B,\mathbb{Z})$, נשים לב כי אם $\lambda : B \to C$ היא מונומורפיזם מפצל עבור פונקציית ההטלה $\pi : C \to B$, הרי ש- $\lambda[S] \subseteq S\times\mathbb{Z}$ ולכן קיים $\omega > n$ כך ש- $\lambda|_S = f_n$, ומטענות 3.5 ו-5.5 נובע כי $\lambda$ היא ההרחבה <u>היחידה</u> של $f_n$ להומומורפיזם על $B$ (או כל חבורה בין $B_0$ ל- $B$).

<u>משפט 6.3</u> : כל חבורה בת-מניה המקיימת תנאי Pontryagin היא חופשית.
הוכחה : תהי $A$ חבורה בת-מניה המקיימת תנאי Pontryagin. נניח מניה של איבריה $A=\{a_n \mid n<\omega\}$ , נגדיר באינדוקציה סדרה עולה $\langle B_n \mid n<\omega\rangle$ של חבורות נ״ס טהורות ב- $A$ .
בסיס האינדוקציה : $B_0=0$ .
הנחת האינדוקציה : לכל $n\geq k$ , $B_k$ היא חבורה נ״ס טהורה ב- $A$ .
צעד האינדוקציה : תהי $B_{n+1}$ חבורה נ״ס טהורה המכילה את $\langle B_n \cup \{a_n\}\rangle$ (אשר קיומה מובטח מתנאי Pontryagin).
מכיוון שלכל $n$ , $B_n$ טהורה, נקבל כי $B_{n+1}/B_n$ היא חסרת פיתול כתת-חבורה של $A/B_n$ , ונוצרת-סופית כמנה של $B_{n+1}$ (בעצמה נ״ס), מטענה 3.2 נקבל כי $B_{n+1}/B_n$ חופשית, ומכאן כי הסדרה $\langle B_n \mid n<\omega\rangle$ עומדת בתנאי טענה 4.2, ומכאן כי $\bigcup_{n<\omega} B_n = A$ חופשית.

<u>מסקנה 6.4 (Stein)</u>: חבורה בת-מניה היא חופשית אמ״מ היא חבורת- $W$ .
<u>הוכחה</u> : 4.4 + 6.2 + 6.3.