5. קוהומולוגיה של חבורות-W

<u>משפט 5.1</u>: חבורה B היא חבורת-W אמ"מ $Ext^1(B,\mathbb{Z})=0$.

<u>הוכחה</u>: כזכור, הפנקטור $Ext^1(\_,\mathbb{Z})$ הוא הנגזרת הימנית הראשונה של הפנקטור הקונרטא-ווריאנטי $Hom(\_,\mathbb{Z})$, כלומר הקוהומולוגיה הראשונה המושרית מכל רזולוציה פרוייקטיבית מחוקה של B.

נשים לב כי קיימת ל-B רזולוציה חופשית "קצרה": תהי F_0 חבורה חופשית עם בסיס B ואפימורפיזם $\varepsilon : F_0 \to B$ כמו זה שבהוכחת טענה 3.3, ויהי $F_1 := Ker(\varepsilon)$, אז מטענה 3.1 נובע כי הסדרה המדויקת $0 \to F_1 \xrightarrow{\delta} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \to 0$ היא רזולוצייה חופשית של B.

לאחר מחיקת B, הפנקטור הקונטרא-ווריאנטי $Hom(\_,\mathbb{Z})$ משרה את הסדרה:

$$Hom(F_0,\mathbb{Z}) \xrightarrow{d^0} Hom(F_1,\mathbb{Z}) \xrightarrow{d^1} 0.$$

$Ext^1(B,\mathbb{Z})$ היא הקוהומולוגיה הראשונה, כלומר $Ext^1(B,\mathbb{Z}) = Ker(d^1)/\operatorname{Im} d^0$, ונסיק כי

$Ext^1(B,\mathbb{Z})=0$ אמ"מ $\operatorname{Im} d^0 = Hom(F_1,\mathbb{Z})$, באשר $d^0(f) = f\circ\delta$, כלומר:

$Ext^1(B,\mathbb{Z})=0$ אמ"מ לכל $\varphi_1 \in Hom(F_1,\mathbb{Z})$ קיים $\varphi_0 \in Hom(F_0,\mathbb{Z})$ כך ש-$\varphi_0\circ\delta = \varphi_1$.

$\Leftarrow$ נניח B חבורת-W ו-$\varphi_1 \in Hom(F_1,\mathbb{Z})$.

ראשית נבקש חבורה C והומומורפיזמים i,θ, המרכיבים יחדיו דיאגרמה חילופית:

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi_1"] & F_0 \arrow[d, "\theta"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "i"] & C
\end{tikzcd}$$

תהי $C := {(\mathbb{Z}\oplus F_0)}/{I}$ באשר $I := \{(\varphi_1(y), -\delta(y)) \mid y\in F_1\}$ והעתקות $i(n) = (n,0)+I$ ו-$\theta(x) = (0,x)+I$. ואכן מקבלים חילופיות: $\theta(\delta(y)) = (0,\delta(y))+I = (\varphi_1(y),0)+I = i(\varphi_1(y))$.

כעת נגדיר הומומורפיזם $\pi : C \to B$ ע"י $\pi((n,x)+I) = \varepsilon(x)$. ההעתקה מוגדרת היטב:
נניח $(n_1,x_1)+I = (n_2,x_2)+I$ אזי קיים $y\in F_1$ כך ש-$(n_1-n_2, x_1-x_2) = (\varphi_1(y), -\delta(y))$, כלומר $x_1-x_2 \in \operatorname{Im}\delta$ ומדיוק הסדרה מקבלים $x_1-x_2 \in Ker\varepsilon$, כלומר $\varepsilon(x_1)=\varepsilon(x_2)$, כנדרש.

יהי $x\in F_0$, אז $\pi(\theta(x)) = \pi\left((0,x)+I\right) = \varepsilon(x) = 1_B(\varepsilon(x))$, ומקבלים דיאגרמה חילופית:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi_1"] & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\theta"] & B \arrow[r] \arrow[d, "1_B"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] & C \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

דיוק: נניח $i(n) = (0,0)+I$, אז קיים $y\in F_1$, כך ש-$\left(n-\varphi_1(y), \delta(y)\right) = (0,0)$, אך δ מונו', לכן $y=0$ ומקבלים $n = \varphi_1(y) = \varphi_1(0) = 0$, ומכאן כי i מונו'. ε אפימורפיזם ולכן גם π אפימורפיזם.

כמו-כן:

$$Ker(\pi) = \{(n,x)+I \mid n\in\mathbb{Z}, x\in Ker\varepsilon\} = \{(n,\delta(y))+I \mid n\in\mathbb{Z}, y\in F_1\} =$$
$$= \{(n+\varphi_1(y),0)+I \mid n\in\mathbb{Z}, y\in F_1\} = \{i(n+\varphi_1(y)) \mid n\in\mathbb{Z}, y\in F_1\} = \{i(n) \mid n\in\mathbb{Z}\} = \operatorname{Im}(i)$$

מההנחה כי B חבורת-W וטענה 3.6, נובע כי קיים אפימורפיזם מפצל $\tau : C \to \mathbb{Z}$, כך ש-$\tau\circ i = 1_{\mathbb{Z}}$.

לבסוף נגדיר $\varphi_0 : F_0 \to \mathbb{Z}$ ע"י $\varphi_0 = \tau\circ\theta$ ונקבל $\varphi_0\circ\delta = \tau\circ\theta\circ\delta = \tau\circ i\circ\varphi_1 = \varphi_1$, כנדרש.

$\Rightarrow$ נניח $Ext^1(B,\mathbb{Z})=0$.

תהי סדרה קצרה מדויקת $0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{i}C\xrightarrow{\pi}B\to 0$, נראה כי היא מתפצלת.

תהי F_0 חבורה חופשית עם בסיס C ואפימורפיזם $\theta:F_0\to C$ כמו זה שבהוכחת טענה 3.3, נגדיר $\varepsilon:F_0\to B$ ע״י $\varepsilon=\pi\circ\theta$, אז עבור $F_1:=Ker(\varepsilon)$, נקבל כמו מקודם, רזולוציה חופשית של B :

$0\to F_1\xrightarrow{\delta}F_0\xrightarrow{\varepsilon}B\to 0$.

עוד נגדיר הומומורפיזם $\varphi_1:F_1\to\mathbb{Z}$. די להגדיר את φ_1 על בסיס כלשהו $X_1\subset F_1$:

יהי $x\in X_1$ ו- $y=\theta(\delta(x))$. i מוני, נרצה להגדיר $\varphi_1(x)=i^{-1}(y)$, אך יש לוודא כי $y\in\mathrm{Im}(i)$.

מדיוק : $\varepsilon(\delta(x))=0$, ולכן מהגדרת ε : $\pi(y)=\pi(\theta(\delta(x)))=0$, לכן $y\in Ker(\pi)=\mathrm{Im}(i)$.

בכך הבטחנו כי $i\circ\varphi_1=\theta\circ\delta$. $Ext^1(B,\mathbb{Z})=0$ ולכן קיים $\varphi_0\in Hom(F_0,\mathbb{Z})$ כך ש- $\varphi_0\circ\delta=\varphi_1$.
התקבלה דיאגרמה חילופית :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi_1"] & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dl, "\varphi_0"] \arrow[d, "\theta"] & B \arrow[r] \arrow[d, "1_B"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] & C \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

נרצה להגדיר הומומורפיזם מפצל $\tau:C\to\mathbb{Z}$. יהי $c\in C$,
זכור F_0 היא חבורה חופשית עם בסיס C, לכן נוכל לזהות את c כאיבר ב- F_0, נסמנו x_c,
ומתקיים $\theta(x_c)=c$. נגדיר $\tau(c):=\varphi_0(x_c)$. אכן קיבלנו הומומורפיזם, לכל $c,d\in C$ מתקיים :
$\tau(c-d)=\varphi_0(x_c-x_d)=\varphi_0(x_c)-\varphi_0(x_d)=\tau(c)-\tau(d)$. כמו-כן, $\tau\circ i=1_{\mathbb{Z}}$:
יהי $n\in\mathbb{Z}$, ו- $x_{i(n)}$ הזיהוי של $i(n)$ ב- F_0, אז מהגדרת ε : $\varepsilon(x_{i(n)})=\pi(\theta(x_{i(n)}))=\pi(i(n))=0$,
ולכן, מדיוק, קיים $y\in F_1$ כך ש- $\delta(y)=x_{i(n)}$. לכן $\theta(\delta(y))=i(n)$, לכן $i(\varphi_1(y))=i(n)$, ומכיוון ש- i הוא מונומורפיזם, מקבלים $\varphi_1(y)=n$.
לבסוף נוכל להסיק את הנדרש : $\tau(i(n))=\varphi_0(x_{i(n)})=\varphi_0(\delta(y))=\varphi_1(y)=n$.

טענה 5.2 : כל תת-חבורה של חבורת- W היא חבורת- W.
הוכחה : נניח B_1 חבורת- W, ו- $B_1\ge B_0$.

נתבונן בסדרה הקצרה המדויקת של העתקת המנה : $0\to B_0\xrightarrow{i}B_1\xrightarrow{\pi}B_1/B_0\to 0$.

ממשפט הסדרה הארוכה, נקבל סדרה מדויקת :

$$0\to Hom(B_1/B_0,\mathbb{Z})\to Hom(B_1,\mathbb{Z})\to Hom(B_0,\mathbb{Z})\to Ext^1(B_1/B_0,\mathbb{Z})\to Ext^1(B_1,\mathbb{Z})\to Ext^1(B_0,\mathbb{Z})\to 0$$

B_1 חבורת- W, וממשפט 5.1 נובע כי $Ext^1(B_1,\mathbb{Z})=0$, ואזי הסדרה המדויקת הנ״ל מסתיימת ב- :
$0\to Ext^1(B_0,\mathbb{Z})\to 0$, כלומר $Ext^1(B_0,\mathbb{Z})=0$, ושוב ממשפט 5.1 נסיק כי B_0 חבורת- W.

טענה 5.3 : כל חבורת- W היא חסרת-פיתול.
הוכחה : נניח בשלילה B חבורת- W, ו- $0\ne x\in B$ ו- $0<n$ מינימלי כך ש- $nx=0$, אזי $\langle x\rangle\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
מטענה 5.2 נקבל כי $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ חבורת- W ובפרט קיים מונומורפיזם מפצל $\lambda:\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ עבור העתקת המנה $0\to n\mathbb{Z}\xrightarrow{i}\mathbb{Z}\xrightarrow{\pi}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to 0$, אך $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ אינה משתכנת ב- $\mathbb{Z}$. סתירה.

<u>הגדרה 5.4</u> : תהי חבורה B. חבורה C תקרא **חבורת-$(B,\mathbb{Z})$** אמ"מ :

1. כקבוצות : $C = B\times\mathbb{Z}$.
2. מתקיים בחבורה $(0,n)+(0,m)=(0,n+m)$.
3. **פונקצית ההטלה** $\pi : C\to B$ המוגדרת ע"י $\pi(b,n)=b$ היא הומומורפיזם.

<u>הערה</u> : נשים לב כי מדרישות 2 ו-3 בהגדרה 5.4, נובע כי האיבר הנייטרלי בחבורת $(B,\mathbb{Z})$ הוא $(0,0)$.

<u>טענה 5.5</u> : נניח B חבורת חסרת-פיתול ו- C חבורת-$(B,\mathbb{Z})$ <u>אז</u> C חסרת-פיתול.
<u>הוכחה</u> : יהי $x=(b,n)\in C$ ו- $m\neq 0$ כך ש- $mx=(0,0)$.
מ-5.4.3 נקבל $0=\pi(mx)=m\pi(x)=mb$, ומההנחה כי B חסרת-פיתול נסיק $b=0$.
מ-5.4.2 נקבל $mx=(0,mn)=(0,0)$, ומההנחה $m\neq 0$ נסיק $n=0$.

<u>טענה 5.6</u> : נניח $B_1\ge B_0$ חבורות-W, כך ש- B_1/B_0 אינה חבורת-W אז :

1. קיים הומומורפיזם $\psi: B_0\to\mathbb{Z}$ אשר אינו ניתן להרחבה להומומורפיזם $B_1\to\mathbb{Z}$.
2. נניח C_0 חבורת-$(B_0,\mathbb{Z})$ ו- λ מונומורפיזם מפצל עבור $\pi: C_0\to B_0$, אז קיימת C_1, חבורת-$(B_1,\mathbb{Z})$, המרחיבה את C_0 ואשר לא ניתן להרחיב את λ למונומורפיזם מפצל עבור $\pi: C_1\to B_1$.

<u>הוכחה</u> : 1. בסימוני הוכחת טענה 5.2, נתבונן במרכז הסדרה הארוכה המדויקת :

$$Hom(B_1,\mathbb{Z})\xrightarrow{res}Hom(B_0,\mathbb{Z})\xrightarrow{\sigma}Ext^1(B_1/B_0,\mathbb{Z})\to Ext^1(B_1,\mathbb{Z})$$

מההנחות ומשפט 5.1 נקבל $Ext^1(B_1,\mathbb{Z})=0$ ו- $Ext^1(B_1/A,\mathbb{Z})\neq 0$, כלומר כי σ היא אפימורפיזם על חבורה לא-טריוואלית, ובפרט $Hom(B_0,\mathbb{Z})\setminus Ker\sigma\neq\phi$ ומדיוק, קיים $\psi\in Hom(B_0,\mathbb{Z})\setminus \mathrm{Im}(res)$, ואזי לכל $\varphi\in Hom(B_1,\mathbb{Z})$, $\varphi|_{B_0}\neq\psi$.

2. מההנחה כי הסדרה $0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{i(n)=(0,n)}C_0 \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} B_0\to 0$ מתפצלת וטענה 3.6 נובע כי ההעתקה $\tau: B_0\oplus\mathbb{Z}\to C_0$ המוגדרת ע"י $\tau(b,n)=i(n)+\lambda(b)$ היא איזומורפיזם חבורות.
יהי $b\in B_0, n\in\mathbb{Z}$, מתקיים $\pi(\tau(b,n))=\pi(\lambda(b))=b$. יהי $\rho: B_0\to B_0\oplus\mathbb{Z}$ המונומורפיזם המפצל הקאנוני : $\rho(b)=(b,0)$. מתקיים $\rho(b)=(b,0)=\tau^{-1}\tau(b,0)=\tau^{-1}(\lambda(b))$.
התקבלה דיאגרמה אשר היא ותמונת מראה אופקית שלה חילופיות :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, leftrightarrow, "1"] & B_0\oplus\mathbb{Z} \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, leftrightarrow, "\tau"] & B_0 \arrow[l, shift left, "\rho"] \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] & C_0 \arrow[r, shift left, "\pi"] & B_0 \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

באשר 1 הם הומומורפיזמי הזהות, i הם הומומורפיזמי ההזרקה $n\mapsto(0,n)$, ו- π הן פונקציות ההטלה של חבורות $(B_0,\mathbb{Z})$.

לשם פשטות, נוכל להניח בה"כ כי $C_0=B_0\oplus\mathbb{Z}$ ו- λ הוא המונומורפיזם מפצל הקאנוני, שכן הדיאגרמה הדו-חילופית מבטיחה כי כל תהליך המבוצע על שורה אחת ניתן לתירגום לשורה השניה.

תהי $C_1' = B_1 \oplus \mathbb{Z}$ ו- $\psi : B_0 \to \mathbb{Z}$ אשר קיומה מובטח מסעיף 1.
נגדיר $\gamma : C_0 \to C_1'$ ע"י $\gamma(b,n) = (b, n+\psi(b))$, ונניח בשלילה כי קיים מונומורפיזם מפצל $\lambda_1' : B_1 \to C_1'$ עבור פונקציית ההטלה $\pi : C_1 \to B_1$ המרחיב את λ, כלומר כי $\lambda_1'|_{B_0} = \gamma \circ \lambda$.
תהי $\tau : C_1' \to \mathbb{Z}$ פונקציית ההטלה המוגדרת ע"י $\tau(b,n) := n$. נגדיר $\varphi : B_1 \to \mathbb{Z}$ ע"י $\varphi = \tau \circ \lambda_1'$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, leftrightarrow, "1"] & C_0 \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, "\gamma"] & B_0 \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, shift left, "i"] & C_1' \arrow[l, shift left, "\tau"] \arrow[r, shift left, "\pi"] & B_1 \arrow[l, shift left, "\lambda_1'"] \arrow[r] \arrow[ll, bend left, "\varphi"] & 0
\end{tikzcd}$$

יהי $b \in B_0$, אז מתקיים $\varphi(b) = \tau(\lambda_1'(b)) = \tau(\gamma(\lambda(b)) = \tau(\gamma(b,0)) = \tau((b,\psi(b))) = \psi(b)$.
קיבלנו $\varphi \in Hom(B_1, \mathbb{Z})$ המרחיב את ψ, בסתירה לבחירת ψ, ולכן λ_1' אינו קיים.
נשים לב כי אילו התקיים $C_1' \geq C_0$ היינו מסיימים, אך רק מתקיים $C_1' \geq \gamma[C_0]$.
כדי להתגבר על הבעיה, נגדיר פונקציה $f : C_1' \to B_1 \times \mathbb{Z}$ ע"י

$$f(b,n) := \begin{cases} (b,n) & b \notin B_0 \\ (b, n-\psi(b)) & b \in B_0 \end{cases}$$

כזכור, ψ הוא מונומורפיזם מפצל ולכן f היא פונקציה חח"ע.
יהי $(b,n) \in B_0 \oplus \mathbb{Z}$, אז $(f \circ \gamma)(b,n) = f(b, n+\psi(b)) = (b,n)$, ומכאן כי $f \circ \gamma|_{C_0} = 1_{C_0}$.
תהי C_1 הקבוצה $B_1 \times \mathbb{Z}$ עם מבנה של חבורה כך ש- f הוא איזומורפיזם חבורות, כלומר, לכל $u, v \in B_1 \times \mathbb{Z}$, מתקיים $u + v := f(f^{-1}(u) + f^{-1}(v))$, אז מקבלים כי C_1 חבורה המרחיבה את C_0, כך שלא קיים מונומורפיזם מפצל $\lambda_1 : B_1 \to C_1$ עבור $\pi : C_1 \to B_1$ המהווה הרחבה של λ.
אכן, אם בשלילה λ_1 כנ"ל, אז $f^{-1} \circ \lambda_1$ הוא מונומורפיזם מפצל של $\pi : C_1' \to B_1$ המרחיב את λ, אך הוכחנו כי אין כזה.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, leftrightarrow, "1"] & C_0 \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, "\gamma"] & B_0 \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, leftrightarrow, "1"] & C_1' \arrow[r, shift left, "\pi"] & B_1 \arrow[l, shift left, "\lambda_1'"] \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & C_1 \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[u, "f"] & B_1 \arrow[l, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

<u>מסקנה 5.7</u> : נניח $B_1 \geq B_0$ חבורות- W, ו- C_0 חבורת- $(B_0, \mathbb{Z})$, <u>אז</u> יש חבורת- $(B_1, \mathbb{Z})$, המרחיבה את C_0.
<u>הוכחה</u> : נרחיב את $B_0 \oplus \mathbb{Z}$ ל- $B_1 \oplus \mathbb{Z}$. שימוש בדיאגרמה הדו-חילופית, מעלה כי $B_1 \oplus \mathbb{Z} \geq \tau[C_0]$.
בדומה לסוף הוכחת 5.6, נתקן את $B_1 \oplus \mathbb{Z}$ ונקבל חבורת- $(B_1, \mathbb{Z})$, C_1, כך ש- $C_1 \geq C_0$.