4. סדרות של חבורות חופשיות ובעיית Whitehead

<u>טענה 4.1</u> : נניח חבורות $A \geq B$ כך ש- $A/B, B$ חופשיות, <u>אזי</u> A חופשית, וכל בסיס של B ניתן להרחבה לבסיס של A .

<u>הוכחה</u> : נתבונן בסדרה הקצרה המדויקת של העתקת המנה $0 \to B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/B \to 0$.

מההנחה כי A/B חופשית וטענה 3.3 נובע כי קיים מונו' מפצל $\lambda : A/B \to A$, ומטענה 3.6 נקבל כי $A = B \oplus \operatorname{Im}\lambda$. אם Y בסיס ל- A/B , אזי הוא נשמר תחת מונומורפיזם ו- $\lambda[Y]$ הוא בסיס ל- $\operatorname{Im}\lambda$, ומקבלים כי אם X בסיס ל- B , הרי ש- $X \cup \lambda[Y]$ בסיס ל- A .

<u>טענה 4.2</u> : תהי A חבורה המהווה גבול של סדרה עולה ורציפה של חבורות $\langle A_\alpha | \alpha < \delta \rangle$ כך ש- A_0 חופשית ולכל $\delta > \alpha$, המנה $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ חופשית. <u>אזי</u> :

1. A חופשית (עם בסיס כלשהו X)
2. לכל $\delta > \alpha$, קיימת $X \supset Y$ כך ש- A/A_α חופשית עם בסיס $\{y + A_\alpha | y \in Y\}$.

<u>הוכחה</u> : נבנה באינדוקציה על $\delta > \alpha$ סדרת בסיסים עולה ורציפה $\langle X_\alpha \subseteq A_\alpha | \alpha < \delta \rangle$.

בסיס האינדוקציה : נתון כי A_0 חופשית. יהי X_0 בסיס שלה.

שלב עוקב $\alpha = \beta + 1$: מהנחת אינדוקציה, A_β חופשית, ומהנתון $A_{\beta+1}/A_\beta$ חופשית , לכן נוכל להפעיל את טענה 4.1 ולקבל $X_{\beta+1}$ בסיס המרחיב את X_β (ובפרט נסיק כי $X_{\beta+1}$ חבורה חופשית).

שלב גבולי α : נגדיר $X_\alpha =: \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$, ומרציפות סדרת החבורות נקבל כי X_α בסיס ל- $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$, שכן, בבירור X_α פורש את A_α , ואי-תלות של תת-קבוצה סופית של יוצרים ניתן לאמת כבר ב- A_γ עבור $\alpha > \gamma$ מספיק גדול. לבסוף, נגדיר $\bigcup_{\alpha<\delta} X_\alpha = X$, ונקבל כי X בסיס ל- $\bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha = A$, ובפרט A חופשית (סוף הוכחת 1) ו- $\{y + A_\alpha | y \in X \setminus X_\alpha\}$ בסיס ל- A/A_α (סוף הוכחת 2).

<u>הגדרה 4.3</u> : B היא **חבורת-*W*** (ע״ש Whitehead) אמ״מ כל אפימורפיזם על B עם גרעין $\mathbb{Z}$ מתפצל.

<u>טענה 4.4</u> : כל חבורה חופשית היא חבורת- W .
<u>הוכחה</u> : מטענה 3.3, כל אפימורפיזם על חבורה חופשית מתפצל, בפרט אלו עם גרעין $\mathbb{Z}$.

<u>4.5 בעיית Whitehead</u> :
מה בנוגע להכרחיות בטענה 4.4 ? כלומר, האם כל חבורת- W היא חבורה חופשית ?
המוטיבציה היא למצוא תנאי חלש יותר מזה שבטענה 3.3, כלומר למצוא חבורת-בוחן אחת A , כך שלכל חבורה B וחבורה כלשהי C , כל אפימורפיזם $\theta : C \to B$ מתפצל אמ״מ סדרות מדויקת מהצורה $0 \to A \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} B \to 0$ מתפצלות.
מהערה שאחרי טענה 3.3 מתקבל כי B חופשית אמ״מ כל אפימורפיזם עליה עם גרעין חופשי מתפצל. $\mathbb{Z}$ היא החבורה החופשית ה״קטנה ביותר״ (יוצר אחד). באופן טבעי עולה השאלה - **בעיית Whitehead** : האם $\mathbb{Z}$ היא חבורת-בוחן לחופשיות?