## 3. תוצאות אלמנטריות בתורת החבורות

<u>טענה 3.1</u> : תת-חבורה של חבורה (אבלית) חופשית היא חופשית.

<u>הוכחה</u> : תהי $\oplus_{i<\delta}\langle a_i\rangle = A$ ו- $A \geq B$. לכל $\delta > \alpha$ נגדיר $\oplus_{i<\alpha}\langle a_i\rangle =: A_\alpha$ ו- $B\bigcap A_\alpha =: B_\alpha$.

מאיזומורפיזם שני $B_{\alpha+1}+A_\alpha / A_\alpha \cong B_{\alpha+1} / B_{\alpha+1}\bigcap A_\alpha$, אך היות ו- $B_{\alpha+1}\bigcap A_\alpha = B_\alpha$, נקבל

$B_{\alpha+1}+A_\alpha / A_\alpha \cong B_{\alpha+1} / B_\alpha$. המנה הימנית היא תת-חבורה של $A_{\alpha+1} / A_\alpha \cong \langle a_\alpha\rangle$, לכן $B_\alpha = B_{\alpha+1}$ או

$B_{\alpha+1} / B_\alpha \cong \mathbb{Z}$ ואז קיים $b_\alpha \in B_{\alpha+1}$ כך ש- $B_\alpha \oplus \langle b_\alpha\rangle = B_{\alpha+1}$. במקרה הראשון נסמן $0 = b_\alpha$.

$\bigcup_{\alpha<\delta} B_\alpha = B$ ולכן $\oplus_{\substack{\alpha<\delta \\ b_\alpha\neq 0}}\langle b_\alpha\rangle = B$, כלומר חופשית.

<u>טענה 3.2</u> : חבורה חסרת-פיתול נוצרת-סופית היא חופשית.

<u>הוכחה</u> : ממשפט הפירוק לחבורות אבליות נוצרות-סופית, כל חבורה אבלית נ"ס איזומורפית לסכום ישר של חבורת פיתול וחבורה חופשית, לכן אם החבורה נ"ס חסרת פיתול הרי שהיא חופשית.

<u>טענה 3.3</u> : חבורה $B$ היא חופשית אמ"מ כל אפימורפיזם עליה, מתפצל.

<u>הוכחה</u> : $\Leftarrow$ נניח סדרה מדוייקת $0 \to A \longrightarrow C \xrightarrow{\pi} B \to 0$, ויהי $\{y_i \mid i<\kappa\} = Y$ בסיס ל- $B$.

מההערה שאחרי הגדרה 2.6, קיימת בפרט <u>פונקציה</u> $\lambda : Y \to C$ כך ש- $\pi\circ\lambda = 1_Y$.

$Y$ בסיס ל- $B$ ולכן $\lambda$ מורחבת באופן אחד ויחיד <u>להומומורפיזם</u> $\tilde{\lambda} : B \to C$.

נשים לב כי $\tilde{\lambda}$ כנדרש : יהי $x\in B$, ו- $\sum_{i<\kappa}\alpha_i y_i$ ההצגה היחידה של $x$ לפי $Y$. מתקבל :

$$\left(\pi\circ\tilde{\lambda}\right)x = \left(\pi\circ\tilde{\lambda}\right)\sum_{i<\kappa}\alpha_i y_i = \sum_{i<\kappa}\alpha_i\left(\pi\circ\tilde{\lambda}\right)y_i = \sum_{i<\kappa}\alpha_i\left(\pi\circ\lambda\right)y_i = \sum_{i<\kappa}\alpha_i y_i = x$$

$\Rightarrow$ נניח $\{b_i \mid i<\delta\} = B$ חבורה שכל אפימורפיזם עליה מתפצל, בפרט עבור $F$ חבורה חופשית עם בסיס $B$, ואפימורפיזם $\pi : F \to B$, המוגדר על היוצרים $\forall i<\delta.\pi(b_i) = b_i$.

אם נסמן $Ker\pi =: K$, הרי שקיבלנו סדרה קצרה מדויקת $0 \to K \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} B \to 0$, ומונומורפיזם מפצל $\lambda : B \to F$, המשכן את $B$ בתוך $F$, ומטענה 3.1 נקבל כי $B$ חופשית.

<u>הערה</u> : נשים לב כי הוכחנו קצת יותר! מטענה 3.1 נובע כי הגרעין, $K$, היא חבורה חופשית, ונסיק : חבורה $B$ היא חופשית אמ"מ כל אפימורפיזם עליה <u>עם גרעין חופשי</u>, מתפצל.

<u>טענה 3.4</u> : תהי $A$ חבורה ו- $x\in A$ כך שעבור אינסוף איברי $\mathbb{Z}$, $x$ חליק בהם <u>אז</u> $A$ אינה חופשית.

<u>הוכחה</u> : נניח בשלילה $\{y_i \mid i<\kappa\}$ בסיס ל- $A$, ותהי הצגה $x = \sum_{i<\kappa}\alpha_i y_i$.

$x$ חליק ולכן $x\neq 0$, ובפרט קיים $\kappa > j$ כך ש- $\alpha_j \neq 0$.

$x$ חליק באינסוף איברי $\mathbb{Z}$ ולכן קיימים $n\in\mathbb{Z}$, $y\in A$ כך ש- $|\alpha_i| < |n|$ ו- $x = ny$.

תהי $\sum_{i<\kappa}\beta_i y_i$ ההצגה היחידה של $y$, אז מיחידות הצגה נקבל $x = \sum_{i<\kappa}\alpha_i y_i = \sum_{i<\kappa}(n\beta_i)y_i = ny$,

ובפרט $n|\alpha_j$, סתירה לבחירת $n$.

<u>טענה 3.5</u> : נניח $B_0$ תת-חבורה נוצרת-סופית של חבורה $A$, ו- $S=\{s_1,...,s_k\}$ קבוצת יוצרים שלה.
תהי $B=:\{x\in A \mid \exists n\in \mathbb{N}^+ . nx\in B_0\}$, **הסגור הטהור של $B_0$ ב-$A$**, (מתקיים : $B\geq B_0\supset S$). תהי $C$ חבורה חסרת-פיתול, ו- $\lambda : B\to C$ הומומורפיזם כלשהו. <u>אז</u> $\lambda$ נקבע לחלוטין עפ"י ערכיו ב- $S$.

<u>הוכחה</u>: יהי $x\in B$, אז קיים $n\in\mathbb{N}^+$, כך ש- $nx\in B_0$, ולכן קיימים מקדמים $\{\alpha_1,...,\alpha_k\}\subset\mathbb{Z}$ כך ש- $nx=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i s_i$, ואזי $n\lambda(x)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\lambda(s_i)$. יהי $y\in C$ כלשהו כך ש- $ny=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\lambda(s_i)$.
מתקיים $n(y-\lambda(x))=0$, אך כיוון ש- $C$ חסרת-פיתול נסיק כי $\lambda(x)=y$, ולכן ערכו של $\lambda(x)$ נקבע באופן יחיד מתוך ערכי $\lambda$ על $S$.

<u>טענה 3.6</u> : נניח סדרה קצרה מדויקת $0\to A\xrightarrow{i}C\xrightarrow{\pi}B\to 0$. התנאים הבאים שקולים :

1. הסדרה מתפצלת "מימין" $0\to A\xrightarrow{i}C\underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}}B\to 0$. $(\pi\circ\lambda=1_B)$
2. $C=iA\oplus\lambda B$
3. הסדרה מתפצלת "משמאל" $0\to A\underset{\tau}{\overset{i}{\rightleftarrows}}C\xrightarrow{\pi}B\to 0$. $(\tau\circ i=1_A)$

<u>הוכחה</u> :
$1\Leftarrow 2$ יהי $c\in C$. נסמן $\pi(c)=:b$.
מההנחה, $\pi(\lambda(b))=b=\pi(c)$, כלומר $(\lambda(b)-c)\in Ker\pi$.
מהדיוק נובע כי $\exists a\in A$ כך ש- $\lambda(b)-c=i(a)$, כלומר $\lambda(b)+i(a)=c$, וקיבלנו $C=iA+\lambda B$.
נורמליות מתקיימת באופן טריוויאלי בהקשר של חבורות אבליות, לכן נותר להראות $iA\bigcap\lambda B=0$.
יהי $c\in iA\bigcap\lambda B$. $c\in iA$, לכן $\pi(c)=0$. $c\in\lambda B$ לכן קיים $b\in B$ כך ש- $\lambda(b)=c$.
מתקבל $b=\pi(\lambda(b))=\pi(c)=0$. ולבסוף $(b=0)\leftarrow(c=\lambda(b)=\lambda(0)=0)$, כנדרש.

$2\Leftarrow 3$ נרצה להגדיר $\tau : C\to A$. יהי $c\in C$,
מההנחה $C=iA\oplus\lambda B$, כלומר קיימים $a\in A, b\in B$ כך ש- $c=i(a)+\lambda(b)$. ומיחידות ההצגה והיות $i$ מונומורפיזם נקבל כי ההעתקה $\tau(c)=a$ היא הומומורפיזם מוגדר היטב ומתקיים $\tau\circ i=1_A$.

$3\Leftarrow 1$ נרצה להגדיר הומומורפיזם $\lambda : B\to C$, יהי $b\in B$,
יהי $c\in C$ מקור כלשהו של $b$ לפי $\pi$. נגדיר $\lambda(b)=c-i(\tau(c))$.
ההגדרה היא טובה: נניח $\pi(c_1)=b=\pi(c_2)$, אז $c_1-c_2\in Ker\pi$ וקיים $a\in A$ כך ש- $i(a)=c_1-c_2$, ולכן $a=\tau(i(a))=\tau(c_1-c_2)$ ומתקבל :
$c_1-i(\tau(c_1))-c_2-i(\tau(c_2))=c_1-c_2-i(\tau(c_1-c_2))=c_1-c_2-i(a)=0$.
זהות : עבור $b,c$ כמקודם, $\pi(\lambda(b))=\pi(c)-\pi(i(\tau(c))=\pi(c)=b$.

<u>משפט 3.7</u> : משפט המגדל לתת-חבורות טהורות: נניח מגדל של תת-חבורות $A\geq B\geq C$, באשר $C$ טהורה ב- $B$ ו- $B$ טהורה ב- $A$, <u>אז</u> $C$ טהורה ב- $A$.

<u>הוכחה</u> : ניזכר בהגדרה השקולה : $H$ טהורה ב- $G$ אמ"מ לכל $x\in G$, $nx\in H$ גורר $x\in H$.
נניח $x\in A, nx\in C$. $B\geq C$ ולכן $nx\in C\to nx\in B$.
$x\in A, nx\in B$. $B$ טהורה ב- $A$, לכן $x\in B$.
$x\in B, nx\in C$. $C$ טהורה ב- $B$, לכן $x\in C$.