12. אקסיומת מרטין גוררת קיומה של חבורת-W שאינה חופשית

משפט 12.1 : קיימת חבורה מעוצמה $\aleph_1$ המקיימת תנאי Chase שאינה חופשית.

הוכחה : נבנה באינדוקציה טרנספיניטית סדרה עולה ורציפה של חבורות בנות-מניה $\left\langle A_\alpha \middle| \alpha < \omega_1 \right\rangle$ המקיימת :

1. לכל $\omega_1 > \alpha$, A_α חופשית.
2. לכל $\omega_1 > \delta \geq \alpha + 1$, $A_\delta / A_{\alpha+1}$ חופשית.
3. לכל סודר גבולי $\omega_1 > \lambda$, $A_{\lambda+1} / A_\lambda$ אינה חופשית.

נניח בנינו סדרה כנ"ל, נסמן את גבולה ב- A. בבירור, $\aleph_1 = |A|$, נשים לב כי היא כנדרש :

- הן $\left\langle A_{\alpha+1} \middle| \alpha < \omega_1 \right\rangle$ $\aleph_1$-טהורות, שכן תהי $A' / A_{\alpha+1} \leq A / A_{\alpha+1}$ בת-מניה, אזי קיים $\alpha < \beta$ כך ש- $A_\beta \supset A'$ ומתכונה 2, נובע כי $A_\beta / A_{\alpha+1}$ חופשית, בפרט עבור $A' / A_{\alpha+1}$, כתת-כחבורה.
  בנוסף, מתכונה 1, $\left\langle A_\alpha \middle| \alpha < \omega_1 \right\rangle$ חופשיות, ולכן ממשפט 8.5 נסיק כי מתקיים תנאי Chase.
- A אינה חופשית : קבוצת הגבוליים היא שבת ב- ω_1, וממשפט 8.7 נקבל את הדרוש.

כעת, לבניה באינדוקציה על $\omega_1 > \delta$.

בסיס האינדוקציה : $A_0 = 0$.

הנחת האינדוקציה : נניח בנינו סדרה $\left\langle A_\alpha \middle| \alpha < \delta \right\rangle$ עם התכונות לעיל עבור $\omega_1 > \delta$ כלשהו.

נפריד לשלושה מקרים :

1. $\delta = \beta + 2$: נגדיר $A_\delta := A_{\beta+1} \oplus \mathbb{Z}$.

1.1 מהנחת אינדוקציה נקבל כי A_δ חופשית : סכום ישר של חבורות חופשיות היא חבורה חופשית.

1.2 נניח $\delta > \alpha + 1$, בפרט, $\beta + 1 \geq \alpha + 1$ אז $\dfrac{A_\delta / A_{\alpha+1}}{A_{\beta+1} / A_{\alpha+1}} \cong A_\delta / A_{\beta+1}$. היות ו- $A_\delta / A_{\beta+1} \cong \mathbb{Z}$ חופשית, ומהנחת אינדוקציה, $A_{\beta+1} / A_{\alpha+1}$ חופשית, נקבל מ-4.1 כי $A_\delta / A_{\alpha+1}$ חופשית.

1.3 תכונה 3 אינה רלוונטית במקרה זה.

2. $\delta = \lambda$ סודר גבולי : נגדיר $A_\lambda := \bigcup_{\alpha < \lambda} A_\alpha$. $\omega_1 > \lambda$ סודר בן-מניה, לכן קיימת סדרה $\left\langle \tau_n \middle| n < \omega \right\rangle$ עולה ממש של סודרים עוקבים שגבולה λ, ועוד נדרוש $\tau_0 = 0$.

2.1 בבירור, $A_\lambda = \bigcup \left\langle A_{\tau_n} \middle| n < \omega \right\rangle$. מהנחת אינדוקציה מתקבל כי A_λ היא גבול של חבורות חופשיות בנות-מניה ולכל $\omega > n$ מתקיים $A_{\tau_{n+1}} / A_{\tau_n}$ חופשית, ומ-4.2.1 נסיק כי A_λ חופשית. יתר על כן :

2.2 מ-4.2.2 מקבלים A_λ / A_{τ_n} חופשית לכל $n < \omega$. נניח $\lambda > \alpha + 1$. יהי $n < \omega$ כך ש- $A_{\alpha+1} \supset A_{\tau_n}$,

אז מתקיים : $\dfrac{A_\lambda / A_{\alpha+1}}{A_{\tau_n} / A_{\alpha+1}} \cong A_\lambda / A_{\tau_n}$. מהנחת אינדוקציה $A_{\tau_n} / A_{\alpha+1}$ חופשית, ולכן נסיק $A_\lambda / A_{\alpha+1}$ חופשית.

2.3 תכונה 3 אינה רלוונטית במקרה זה.

3. נניח $\delta = \lambda + 1$ באשר λ גבולי : תהי $\langle \tau_n | n < \omega \rangle$ כמקודם $(\lim_{n\to\omega} \tau_n = \lambda)$. מ-4.2.1 קיימת סדרה רציפה $\langle X_n \subset A_{\tau_n} | n < \omega \rangle$ של בסיסים (בהתאמה) ו- $X =: \bigcup\limits_{n<\omega} X_n$ בסיס ל- A_λ.

לכל $0 < n < \omega$ נבחר $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$, ויהי $Y_n =: X_n \setminus \{x_1, ..., x_n\}$. תהי $G =: \left\langle \bigcup\limits_{n=1}^{\omega} Y_n \right\rangle$.

נשים לב כי $\coprod\limits_{n=1}^{\omega} \langle x_n \rangle \oplus G \cong A_\lambda$. לשם פשטות נזהה ביניהם.

נסמן $H =: \prod\limits_{n=1}^{\omega} \langle x_n \rangle$, ונגדיר $\{z_m \in H | 0 < m < \omega\}$, על-ידי : $\forall m > 0. z_m := \sum\limits_{n=m}^{\omega} (n!/m!) x_n$.

תחת הזיהוי מקבלים $G \oplus H \geq A_\lambda$. ותהי $A_{\lambda+1} =: \langle A_\lambda \cup \{z_m | 0 < m < \omega\} \rangle \leq G \oplus H$.

3.1 $A_{\lambda+1}$ חופשית : נטען כי $B =: \bigcup\limits_{n=1}^{\omega} Y_n \cup \{z_m | 0 < m < \omega\}$ בסיס. בבירור $A_{\lambda+1} \geq \langle B \rangle$.

כדי להראות כי $A_{\lambda+1} \leq \langle B \rangle$ די באבחנה כי לכל $n < \omega$ מתקיים $x_n = n! z_n - (n+1)! z_{n+1}$.

אי-תלות : נניח $\sum\limits_{b\in B} \alpha_b b = 0$ באשר $\alpha_b \in \mathbb{Z}$, כמעט כולם אפס.

אם לכל $0 < m$, $\alpha_{z_m} = 0$, מאחר ו- $\bigcup\limits_{n<\omega} Y_n \subset X$ נקבל שהתלות טריוויאלית. אחרת, יהי m המינימלי כך ש- $\alpha_{z_m} \neq 0$, ואזי המקדם של x_m ב- $\sum\limits_{b\in B} \alpha_b b$ הוא $\alpha_{z_m} \neq 0$ ובפרט $\sum\limits_{b\in B} \alpha_b b \neq 0$.

3.2 נניח $\lambda + 1 > \alpha + 1$. יהי $k < \omega$ כך ש- $A_{\alpha+1} \supset A_{\tau_k}$. נשים לב כי לכל $m < k$ מתקיים (ראו הערה) $z_m + A_{\tau_k} = \dfrac{(k+1)!}{m!} z_{k+1} + A_{\tau_k}$, ונקבל כרגיל כי המנה $A_{\lambda+1} / A_{\tau_k}$ היא חופשית עם בסיס $\left\{ y + A_{\tau_k} \middle| y \in \left(\{z_n | k < n < \omega\} \cup \bigcup\limits_{n=k+1}^{\omega} Y_m \right) \setminus X_k \right\}$. נשתמש בהנחת אינדוקציה וטענה 4.1 :

$\dfrac{A_{\lambda+1} / A_{\alpha+1}}{A_{\tau_k} / A_{\alpha+1}} \cong A_{\lambda+1} / A_{\tau_k}$ כדי להסיק כי $A_{\lambda+1} / A_{\alpha+1}$ חופשית.

הערה : $A_{\tau_k} \ni \sum\limits_{n=m}^{k} (n!/m!) x_n = \sum\limits_{n=m}^{\omega} \dfrac{n!}{m!} x_n - \sum\limits_{n=k+1}^{\omega} \dfrac{(k+1)! n!}{m!(k+1)!} x_n = z_m - \dfrac{(k+1)!}{m!} z_{k+1}$.

3.3 ${A_{\lambda+1}}/{A_\lambda}$ איננה חופשית. לכל $0<m<\omega$, $m!z_m - z_1 = \sum_{n=m}^{\omega} n!x_n - \sum_{n=1}^{\omega} n!x_n = \sum_{n=1}^{m-1} n!x_n \in A_\lambda$,
כלומר $m!z_m + A_\lambda = z_1 + A_\lambda$, כלומר ל- ${A_{\lambda+1}}/{A_\lambda} \ni z_1 + A_\lambda$, אינסוף מחלקים ב- $\mathbb{Z}$, ומטענה 3.4
נקבל כי ${A_{\lambda+1}}/{A_\lambda}$ אינה חופשית.

<u>משפט 12.2</u> : נניח $MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$. כל חבורה מעוצמה $\aleph_1$ המקיימת תנאי Chase , היא חבורת- W .

<u>הוכחה</u> : נניח B , חבורה המקיימת תנאי Chase, וסדרה קצרה מדוקת $0 \to \mathbb{Z} \to C \xrightarrow{\pi} B \to 0$.
נסמן ב- $\sum$ את קבוצת כל תת-החבורות הטהורות הנוצרות-סופית של B .
נשים לב כי מההנחה על B נובע כי היא $\aleph_1$-חופשית, ולכן כל החבורות ב- $\sum$ הן חופשיות.
תהי $P := \left\{\varphi : A \to C \middle| A \in \sum, \pi\circ\varphi = 1_A\right\}$. מטענה 3.3 נובע כי P אינה ריקה.
נראה כי מתקיימים תנאים 1 ו-2 של משפט 11.8 ונסיק כי קיים $\lambda : B \to C$ מונומורפיזם מפצל
עבור π (שכן לכל $\varphi \in P$ מתקיים פיצול חלקי $\pi\circ\varphi = 1$).

<u>משפט 12.2.1</u> : לכל $F \subset B$ סופית וכל $\varphi \in P$ קיים $\psi \in P$ הממשיך את φ ו- $F \subset dom(\psi)$.

<u>הוכחה</u> : יהי $A =: dom(\varphi)$, אז A נוצרת-סופית, ומכיוון ש- F סופית, נקבל כי $\langle A \cup F\rangle$ נוצרת-סופית, עם קבוצת יוצרים $\{y_1,...,y_n\}$, ובפרט בת-מניה. יהי $A' =: \left\{x \in B \middle| \exists n \in \mathbb{N}^+ . nx \in \langle A\cup F\rangle\right\}$,
הסגור הטהור של $\langle A \cup F\rangle$, אז A' גם כן בת-מניה $\left(|A|\cdot\aleph_0 \ge |A'| \ge |A|\right)$.
$\langle A\cup F\rangle \le A' \le B$. A' תת-חבורה בת-מניה של חבורה $\aleph_1$-חופשית, ולכן קיים לה בסיס, $X \subset A'$.
כמו-כן קיימים $\{x_1,...,x_m\} \subset X$ ומקדמים $\left\langle \beta_{ij} \in \mathbb{Z} \middle| 1 \le j \le m, 1 \le i \le n\right\rangle$ כך ש- $\forall i . y_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} x_j$.
נסמן $A'' =: \langle x_1,...,x_m\rangle$. בבירור, $A'' \le A'$, נראה $A' \le A''$, ונסיק כי A' נ״ס, כלומר $A' \in \sum$.
אכן, נניח $a \in A'$, אז מהגדרה, קיים $n \in \mathbb{N}^+$ כך ש- $na \in \langle A\cup F\rangle$, ואזי $na = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, ולכן
$na = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_{ij} x_j$, ומכיוון ש- A'' חופשית, מתקיים $a = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_i\beta_{ij}}{n} x_j$, כלומר $a \in A''$, כנדרש.
כזכור, A תת-חבורה טהורה של B , לכן ${B}/{A}$ חסרת-פיתול, בפרט ${A'}/{A}$ חסרת-פיתול.
כמו-כן, ${A'}/{A}$ נוצרת-סופית, כמנה של חבורה נוצרת-סופית, ומטענה 3.2 נסיק כי ${A'}/{A}$ חופשית.
לבסוף, מטענה 4.1 נקבל כי קיים ל- A' בסיס מהצורה $Y_1 \cup Y_2$ כאשר Y_1 בסיס ל- A .
נגדיר $\psi : A' \to C$ על איברי הבסיס :
לכל $y \in Y_1$ תהי $\psi(y) = \varphi(y)$, ולכל $y \in Y_2$ תהי $\psi(y) = b_y$ באשר $\pi(b_y) = y$ כלשהו (יש כזה, היות ו- π אפימורפיזם). כנדרש.

<u>משפט 12.2.2</u> : לכל $P \supset P'$ שאינה בת-מניה קיימים $\varphi_1, \varphi_2 \in P'$ שונים ו- $\psi \in P$, כך ש- ψ מרחיב את φ_1, φ_2.

<u>הערה</u> : כזכור, איננו מניחים כי B חופשית (למעשה, המקרה המעניין הוא המקרה ההפוך), אך מסתבר שעל קבוצה "גדולה", אוסף ההומומורפיזמים מוגדרים על חבורה חופשית. נפרט :

<u>טענה 12.2.2.1</u> : נניח $P \supset P'$ אינה בת-מניה. אז קיימים $B \geq B'$ חופשית וטהורה ו- $P' \supset P''$ שאינה בת-מניה, m טבעי, <u>כך</u> שלכל $\varphi \in P''$ מתקיים $dom(\varphi) \subseteq B'$ ו- $rank(dom(\varphi)) = m$.

<u>הוכחת 12.2.2.1</u> : נניח סידור $P' = \{\varphi_\alpha | \alpha < \omega_1\}$ ונסמן $\forall \alpha . A_\alpha := dom(\varphi_\alpha)$. נגדיר $r : \omega_1 \to \omega$ ע"י $r(\alpha) = rank(A_\alpha)$ (כזכור, הפונקציות ב- P מוגדרות על חבורות חופשיות נ"ס), מעיקרון שובך-יונים, קיים מספר טבעי m ותת-קבוצה $P' \supset R_1$ מעוצמה $\aleph_1$, כך ש- $\forall \varphi_\alpha \in R_1 . r(\alpha) = m$.
לשם פשטות הסימון, נניח בה"כ כי $P' = R_1$, כלומר, כי $\forall \alpha < \omega_1 . r(\alpha) = m$.
לכל $A \in \sum$ (כלומר A תת-חבורה טהורה של B, נוצרת-סופית), נסמן : $\chi_A := \{\alpha < \omega_1 | A \subseteq A_\alpha\}$.
נתבונן בקבוצה $\Gamma =: \{A \in \sum | \aleph_1 = |\chi_A|\}$, היא מכילה את חבורת ה- 0 ובפרט אינה ריקה. נבחר מתוכה חבורה כלשהי, מקסימלית ביחס להכלה, $\tilde{A}$. (קיימת מקסימלית, אחרת נקבל סתירה להנחה כי לכל $\varphi \in P'$, $rank(dom(\varphi)) = m$).
נקבע בסיס X של $\tilde{A}$. תהי סדרה $\langle Y_\alpha | \alpha \in \chi_{\tilde{A}} \rangle$ כך שלכל $\alpha \in \chi_{\tilde{A}}$, $X \bigcup Y_\alpha$ בסיס של A_α.
אכן יש סדרה כנ"ל : יהי $\alpha \in \chi_{\tilde{A}}$. כמקודם, $\tilde{A}$ תת-חבורה טהורה של B, לכן $B/\tilde{A}$ חסרת-פיתול, בפרט $A_\alpha/\tilde{A}$ חסרת-פיתול כתת-חבורה שלה, ונוצרת-סופית (כמנה של A_α), ולכן חופשית, ומטענה 4.1 נסיק כי $A_\alpha/\tilde{A}$ חופשית, ונוכל לבחור $A_\alpha \supset Y_\alpha$ כך ש- $X \bigcup Y_\alpha$ בסיס של A_α.

נבנה את B' כגבול של סדרה עולה ורציפה $\langle B_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ כך שלכל $\alpha < \omega_1$, B_α בת-מניה, טהורה ו- $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ חופשית, או אז, מ-4.2, נקבל כי B' חופשית, וטהורה כאיחוד עולה של טהורות.
הבניה באינדוקציה על $\delta < \omega_1$:
בסיס האינדוקציה : $B_0 := \tilde{A}$.
הנחת האינדוקציה : נניח שבנינו סדרה עולה ורציפה $\langle B_\alpha | \alpha < \delta \rangle$ עם התכונות הדרושות, ובנוסף בנינו סדרה עולה-ממש של סודרים $\langle \tau_{\alpha+1} \in \chi_{\tilde{A}} | \alpha < \delta \rangle$ כך ש- $Y_{\tau_{\alpha+1}} \subseteq B_{\alpha+1}$.
שלב גבולי : $B_\delta := \bigcup_{\alpha<\delta} B_\alpha$. החבורה טהורה כאיחוד עולה של טהורות, ובת-מניה, כרגיל, ולכן כנדרש.
שלב עוקב $\delta = \alpha + 1$: תהי G_α תת-חבורה בת-מניה $\aleph_1$-טהורה של B המכילה את B_α (קיומה נובע מכך ש- B מקיימת את תנאי Chase).
יהי $\beta = \sup_{\gamma<\delta}(\tau_{\gamma+1})$, בוודאי $\beta < \omega_1$ (איחוד בן-מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן-מניה).
נשים לב כי קיים $\tau > \beta$ כך ש- $\langle Y_\tau \rangle \bigcap G_\alpha = 0$, ונגדיר $\tau =: \tau_\delta$. אכן! נניח בשלילה, לכל $\tau \in \chi_{\tilde{A}} \setminus \beta$ קיים $g_\tau \in \langle Y_\tau \rangle \bigcap G_\alpha$, ואז נוכל להגדיר $f : \chi_{\tilde{A}} \setminus \beta \to G_\alpha$ המתאימה לכל τ את g_τ.

היות ו- $|G_\alpha|=\aleph_0$ ו- $|\chi_{\widetilde{A}}\setminus\beta|=\aleph_1$, נקבל מעקרון שובך-יונים כי קיים $g\in G_\alpha$, ו- $\chi\subseteq\chi_{\widetilde{A}}\setminus\beta$ מעוצמה $\aleph_1$, כך ש- $\forall\tau\in\chi.g\in\langle Y_\tau\rangle$ ובפרט $\forall\tau\in\chi.\widetilde{A}\bigcup\{g\}\subset A_\tau$.

אם נסמן ב- A' את הסגור הטהור של $\langle\widetilde{A}\bigcup\{g\}\rangle$, הרי שכמו בהוכחת 12.2.1, מתקיים $A'\in\sum$.

מאחר ו- A_τ כולן טהורות, הרי ש- $\forall\tau\in\chi.A'\subseteq A_\tau$, ומתקבל כי $A'\in\Gamma$, בסתירה למקסימליות $\widetilde{A}$.

לכן ההגדרה של $\tau_\delta=\tau_{\alpha+1}$ טובה, ונוכל להגדיר את B_δ להיות הסגור הטהור של $B_\alpha+\langle Y_{\tau_{\alpha+1}}\rangle$.

נשים לב כי כיוון ש- $\langle Y_{\tau_\delta}\rangle\bigcap G_\alpha=0$, מתקבל $B_\delta\bigcap G_\alpha=B_\alpha$:

$B_\alpha\subseteq B_\delta, G_\alpha$ על פי הגדרתן. נניח $x\in B_\delta\bigcap G_\alpha$. בפרט $x\in B_\delta$ וקיים $0<n$ כך ש- $nx\in B_\alpha+\langle Y_{\tau_\delta}\rangle$, נרשום $nx=b+y$ באשר $y\in\langle Y_{\tau_\delta}\rangle, b\in B_\alpha\subseteq G_\alpha$. $x\in G_\alpha$, ובפרט $nx-b\in G_\alpha$, ולכן $y\in\langle Y_{\tau_\delta}\rangle\bigcap G_\alpha=0$, כלומר $nx\in B_\alpha$, ומהנחת אינדוקציה B_α טהורה ואזי $x\in B_\alpha$, כנדרש.

מהזיהוי הנ"ל ואיזומורפיזם שני, מתקבל: $B_{\alpha+1}/B_\alpha=B_\delta/B_\delta\bigcap G_\alpha\cong B_\delta+G_\alpha/G_\alpha\le B/G_\alpha$,

מבחירת G_α, B/G_α היא $\aleph_1$-חופשית, וכיוון ש- $B_{\alpha+1}$ בת-מניה, מקבלים כי $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ איזומורפית לתת-חבורת בת-מניה של חבורה $\aleph_1$-חופשית, לכן המנה חופשית, ומכאן כי B_δ כנדרש.

נסמן $P''=\{\varphi_{\tau_{\alpha+1}}|\alpha<\omega_1\}$, ואכן לכל $\tau_{\alpha+1}$, הבניה הבטיחה $B_{\tau_{\alpha+1}}=\widetilde{A}\oplus\langle Y_{\tau_{\alpha+1}}\rangle\le B_{\alpha+1}\le B'$.

<u>טענה 12.2.2.2</u>: לכל קבוצה סופית $B\supset F$, מתקיים $\aleph_0\ge|\{\varphi|_F\,|\varphi\in P\}|$.

<u>הוכחת 12.2.2.2</u>: נניח $\varphi\in P$ כך ש- $\pi\circ\varphi=1_F$, אזי $\forall x\in F.\varphi(x)\in\pi^{-1}(x)$, אולם $|\pi^{-1}(x)|=|\ker\pi|=|\mathbb{Z}|=\aleph_0$, לכן, $\aleph_0=\aleph_0^{|F|}=\left|\bigcup_{x\in F}\pi^{-1}(x)\right|\ge|\{\varphi|_F\,|\varphi\in P\}|$.

<u>הוכחת 12.2.2</u>: עלינו להראות כי לכל $P\supset P'$ מעוצמה $\aleph_1$ קיימים $\varphi_1,\varphi_2\in P'$ הומומורפיזמים שונים, כך שקיים $\psi\in P$ המרחיב את שניהם (במקרה זה, נאמר כי φ_1,φ_2 **מתיישבים**).

מ-12.2.2.1 נובע כי קיימים $B\ge B'$ <u>חופשית וטהורה</u>, $P'\supset P''$ מעוצמה $\aleph_1$, m טבעי, כך שלכל $\varphi\in P''$ מתקיים $dom(\varphi)\subseteq B'$ ו- $rank(dom(\varphi))=m$.

נניח סידור: $P''=\{\varphi_\alpha|\alpha<\omega_1\}$, ונסמן כמקודם $A_\alpha:=dom(\varphi_\alpha)$.

נגדיר פונקציה $f:\omega_1\to[B']^m$ המתאימה לכל $\omega_1>\alpha$ תת-קבוצה של B' בגודל m המהווה בסיס ל- A_α. נבחין כי B' אינה בת-מניה, שאם לא כן, $|[B']^m|=\aleph_0$ ומשובך-יונים, קיימת $\omega_1\supset I$ מעוצמה $\aleph_1$ ו- $F\in[B']^m$ כך ש- $\forall\alpha\in I.A_\alpha=\langle F\rangle$. נניח $\alpha\in I$, אז φ_α נקבע לחלוטין עפ"י ערכיו ב- F, אך מ-12.2.2.2 נקבל $\aleph_0\ge|I|$, בסתירה ל- $|I|=\aleph_1$. יהי לכן $\{x_\alpha|\alpha<\omega_1\}=:X$ בסיס ל- B'.

תהי $X\supset X'$ קבוצה סופית. נשים לב כי $\langle X'\rangle\in\Sigma$, כלומר תת-חבורה טהורה נוצרת-סופית של B.

$\langle X'\rangle$ טהורה ב- B' שכן $B'/\langle X'\rangle$ חופשית עם בסיס $\{x+\langle X'\rangle|x\in X\setminus X'\}$, ובפרט חסרת-פיתול.

B' טהורה ב- B, ומשפט המגדל לתת-חבורות טהורות (3.7), נקבל כי $\langle X'\rangle$ אכן טהורה ב- B.

נבנה משפחה $Q=\langle \psi_\alpha \in P | \alpha<\omega_1 \rangle$ המושרית מ- "P, כך שלכל $\alpha<\omega_1$, ψ_α הוא הומומורפיזם המרחיב את φ_α, ו- $\langle X_\alpha \rangle = dom(\psi_\alpha)$ עבור $X \supset X_\alpha$ סופית.

יהי $\alpha<\omega_1$. A_α היא תת-חבורה של B' עם יוצרים $\{a_\alpha^1, a_\alpha^2, ..., a_\alpha^m\}$. לכן קיימת $X \supset X_\alpha$ סופית כך ש- $\langle X_\alpha \rangle \supset \{a_\alpha^1, a_\alpha^2, ..., a_\alpha^m\}$, ואזי $\langle X_\alpha \rangle \geq A_\alpha$.

מטענה 12.2.2.1, קיימת $\sigma \in P$ המרחיבה את φ_α כך ש- $X_\alpha \subset dom(\sigma)$, ותהי $\psi_\alpha := \sigma |_{\langle X_\alpha \rangle}$.

ברור כי אם קיימים $\alpha, \beta < \omega_1$ ו- $\psi \in P$ כך ש- ψ מרחיבה את ψ_α, ψ_β, אז φ_α ו- φ_β מתיישבים.

בפרט אם Q בת-מניה, הרי שקיימים "$\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in P$ אשר $\psi_\alpha = \psi_\beta$, כלומר מתיישבים, כנדרש.

לכן נניח כי Q אינה בת-מניה, ומשיקולי שובך-יונים, נוכל להניח בה"כ כי קיים n טבעי כך שלכל $\alpha<\omega_1$, $rank(dom(\psi_\alpha))=n$, כלומר $\forall \alpha<\omega_1 . |X_\alpha| = n$.

לכל $T \subset X$, נסמן: $\chi_T = \{\alpha<\omega_1 | T \subseteq X_\alpha)\}$.

נתבונן בקבוצה $\Gamma =: \{T \in P(X) | \aleph_1 = |\chi_T|\}$. $\phi \in \Gamma$ ובפרט Γ אינה ריקה. נבחר מתוכה T כלשהי, מקסימלית ביחס להכלה. (קיימת מקסימלית, אחרת נקבל סתירה להנחה כי $n = |X_\alpha| . \forall \alpha<\omega_1$).

מטענה 12.2.2.2, $\aleph_0 \geq |\{\psi_\alpha |_T \, | \psi_\alpha \in Q, \alpha \in \chi_T\}|$, ולכן משובך-יונים, קיימת $\chi \subset \chi_T$ מעוצמה $\aleph_1$ כך שלכל $\alpha, \beta \in \chi$ מתקיים $\psi_\alpha |_T = \psi_\beta |_T$.

יהי $\beta \in \chi$, יהי $y \in X_\beta \setminus T$, אז $\aleph_0 \geq |\{\alpha \in \chi | y \in X_\alpha\}|$, אחרת $T \cup \{y\} \in \Gamma$ בסתירה למקסימליות, לכן אם נתבונן בהתאמה $f : X_\beta \setminus T \to P(\chi)$, המוגדרת ע"י $f(y) = \{\alpha \in \chi | y \in X_\alpha\}$, נקבל כי $\aleph_0 = n \cdot \aleph_0 \geq |\bigcup \mathrm{Im}(f)|$, ובפרט $\exists \alpha \in \chi \setminus \bigcup \mathrm{Im}(f)$ כך ש- $X_\alpha \cap X_\beta = T$.

$X_\alpha \cup X_\beta$ תת-קבוצה סופית של X, לכן עבור $A =: \langle X_\alpha \cup X_\beta \rangle$, נקבל, כמקודם, $A \in \Sigma$.

נגדיר $\psi : A \to C$ על היוצרים של A. לכל $x \in X_\alpha \cup X_\beta$:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_\alpha(x) & x \in T \\ \psi_\alpha(x) & x \in X_\alpha \setminus T \\ \psi_\beta(x) & x \in X_\beta \setminus T \end{cases}.$$

היות ו- $\alpha, \beta \in \chi$, מתקיים $\psi_\alpha |_T = \psi_\beta |_T$, ומכיוון ש- $X_\alpha \cap X_\beta = T$, $\psi \in P$ מרחיב את ψ_α ו- ψ_β.

מצאנו זוג $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ מתיישבים. כנדרש !

<u>מסקנה (Shelah) 12.3</u> : נניח $MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$. קיימת חבורת- W מעוצמה $\aleph_1$ שאיננה חופשית.

<u>הוכחה</u> : 12.1 + 12.2 .