11. כפיה ואקסיומת מרטין

<u>הגדרה 11.1</u> : קבוצה סדורה חלקית $\langle P,\prec,0\rangle$ נקראת **מושג כפיה**, ואיבריה נקראים **תנאים**.
לכל $p,q\in P$ נאמר כי הם **מתיישבים** ונסמן $p\,\|\,q$ אמ"מ קיים $r\in P$ כך ש- $p,q\prec r$, אחרת נאמר כי הם **אינם מתיישבים** ונסמן $p\perp q$.

<u>הגדרה 11.2</u> : קבוצה $D\subset P$ תקרא **צפופה** אמ"מ לכל $p\in P$ קיים $q\in D$ כך ש- $p\prec q$.

<u>הגדרה 11.3</u> : תהי Γ משפחה של קבוצות צפופות, נאמר כי $G\subset P$ היא **קבוצה Γ-גנרית** אמ"מ :
1. התיישבות : לכל $p,q\in G$ מתקיים $p\,\|\,q$.
2. סגירות כלפי מטה : לכל $p\in G$ מתקיים $G\supset\left\{q\in P\middle|q\prec p\right\}$.
3. חותכת קבוצות צפופות : לכל $D\in\Gamma$ מתקיים $D\bigcap G\neq\phi$.

<u>משפט 11.4</u> : נניח P מושג-כפיה ו- Γ משפחה <u>בת-מניה</u> של קבוצות צפופות <u>אז</u> קיימת קבוצה Γ-גנרית.

<u>הוכחה</u> : נניח מניה $\Gamma=\left\{D_n\middle|n<\omega\right\}$. נבנה באינדוקציה סדרה $\langle p_n\in P\mid n<\omega\rangle$:

בסיס האינדוקציה : יהי $p_0\in D_0$ כלשהו.

הנחת אינדוקציה : p_k הוגדר לכל $n\geq k$.

צעד האינדוקציה : יהי $p_{n+1}\in D_{n+1}$ תנאי כלשהו כך ש- $p_n\prec p_{n+1}$ (יש כזה, שכן, D_{n+1} צפופה).

לבסוף תהי $G=\left\{q\in P\middle|\exists n.q<p_n\right\}$, ונשים לב כי G היא אכן קבוצה Γ-גנרית.

<u>הגדרה 11.5</u> : נניח מושג כפיה P. נאמר כי P מקיימת **תנאי שרשרת בן-מניה** ($c.c.c$) אמ"מ לכל $P\supseteq P'$ שאינה בת-מניה קיימים $p,q\in P'$ שונים מתיישבים.
במילים אחרות : אמ"מ כל אנטי-שרשרת היא לכל היותר בת-מניה.

<u>הגדרה 11.6</u> : MA - **אקסיומת מרטין** – נניח P מושג כפיה $c.c.c.$ ו- Γ משפחה של קבוצות צפופות <u>אז</u> $\left|\Gamma\right|<2^{\aleph_0}\leftarrow$ קיימת G Γ-גנרית.

<u>11.7 דיון</u> : ניתן לראות כי אקסיומת מרטין היא הכללה טבעית של משפט 11.4.
אקסיומת מרטין היא טענה קומבינטורית בעיקרה והיא מאפשרת להכריע בכל הנוגע להכללות של תוצאות "רגילות", כלומר, כאלו הנובעות ישירות מהאקסיומות של תורת-הקבוצות.
במאמר משנת 1971, Solovay & Tennenbaum בנו מודל המקיים $ZFC+MA+\neg CH$.
השלכות מפורסמות של אקסיומת מרטין :
1. איחוד של פחות מ- $2^{\aleph_0}$ קבוצות ממידה אפס (לבג) היא קבוצה ממידה אפס.
2. איחוד של פחות מ- $2^{\aleph_0}$ קבוצות מקטגוריה I היא קבוצה מקטגוריה I.
3. כל משפחה מקסימלית של וקטורים אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ היא מעוצמה $2^{\aleph_0}$.

<u>משפט 11.8</u> : נניח אקסיומת מרטין (MA) ושלילת השערת הרצף $(\neg CH : 2^{\aleph_0} > \aleph_1)$.

נניח B,C חבורות מעוצמה $\aleph_1$ ו- P משפחה של הומומורפיזמים מתת-חבורות של B ל- C, כך ש- :

1. לכל $F \subset B$ סופית וכל $\varphi \in P$ קיים $\psi \in P$ הממשיך את φ ו- $F \subset dom(\psi)$.
2. לכל $P' \subset P$ שאינה בת-מניה קיימים $\varphi_1, \varphi_2 \in P'$ שונים ו- $\psi \in P$, כך ש- ψ מרחיב את φ_1, φ_2.

<u>אז</u> קיים הומומורפיזם $\lambda : B \to C$ כך שלכל $F \subset B$ סופית קיים $\varphi \in P$ כך ש- $\varphi|_F = \lambda|_F$.

<u>הוכחה</u> : נתייחס ל- P כאל מושג כפיה עם הסדר $\varphi_1 \prec \varphi_2$ אמ"מ φ_2 היא הרחבה של הפונקציה φ_1.

נשים לב כי תחת הגדרה זו מתקיים $(\varphi_1 \| \varphi_2)$ אמ"מ ($\varphi_1 \cup \varphi_2$ היא פונקציה).

נסמן ב- $[B]^{<\omega}$ את משפחת כל התת-קבוצות הסופיות של B, אז מתקיים $\left|[B]^{<\omega}\right| = \aleph_1$.

תכונה 1 מבטיחה כי לכל $F \in [B]^{<\omega}$, הקבוצה $D_F = \{\varphi \in P \mid F \subset dom(\varphi)\}$ צפופה.

תכונה 2 מבטיחה כי מושג הכפיה מקיים את תנאי שרשרת בת-מניה $(c.c.c.)$.

נסמן $\Gamma := \left\{D_F \middle| F \in [B]^{<\omega}\right\}$, אז מ- $\neg CH$ נקבל $|\Gamma| = \aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ ומ- MA נקבל כי קיימת קבוצה G, Γ-גנרית.

מתכונת ההתיישבות של קבוצה גנרית, נסיק כי אם נסמן $\lambda =: \cup G$, הרי ש- λ היא פונקציה.

יהי $F \in [B]^{<\omega}$, מכיוון ש- G חותכת את כל הצפופות, קיים $\varphi \in P$, $\varphi \in D_F \cap G$, ולכן $F \subset dom(\lambda)$ ומתקיים $\varphi|_F = \lambda|_F$.

נשים לב עוד כי קיבלנו $\forall F \in [B]^{<\omega}. F \subset dom(\lambda)$, ולכן $B = dom(\lambda)$.

לסיום, נותר להראות כי λ היא הומומורפיזם. אכן, נניח $x_1, x_2 \in B$, ויהי $\varphi \in D_{\{x_1,x_2\}} \cap G$, אז $\lambda(x_1 - x_2) = \varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \lambda(x_1) - \lambda(x_2)$, כנדרש.

"The native pepole of Saskatchewan say that in the old days a boy, upon reaching the threshold of manhood, would undertake a special journy into the forest.
There he would stay alone, without eating. After several days of fasting, the spirit of an animal would appear to him, this animal spirit would guide hin and protect him throughout his adult life.
Today, this tradition is no longer observed except by set-theoretic topologists.
We search not for the spirits of animals, but of axioms. Set-theoretic principles to guide us and protect us throughout our mathematical lives – to guide us toward answers for questions which might otherwise be intractible and to protect us from inconsistency.
One such axiom is Martin's Axiom."

William Weiss, Versions of Martin's Axiom.
In Handbook of Set-Theoretic Topology,
K.Kunen and J.E.Vaughan,editors,chapter 19,
pages 827–886. North-Holland,Amsterdam.