10. $V = L$ גורר כי כל חבורת-W היא חופשית

<u>משפט 10.1</u> : נניח $V = L$.
תהי B גבולה של סדרה עולה ורציפה של חבורות חופשיות בנות-מניה $\langle B_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$,
ותהי S קבוצת הסודרים α כך ש- $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ אינה חופשית.
אם B חבורת-W <u>אז</u> S אינה קבוצת שבת.

<u>הוכחה</u> : נניח S קבוצת שבת, נראה כי B אינה חבורת-W.
בדומה לאופן בו הוכחנו את משפט 6.2, נבנה סדרה עולה-ממש ורציפה של חבורות $\langle C_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$,
כך שלכל $\alpha < \omega_1$, C_α היא חבורת-$(B_\alpha, \mathbb{Z})$.
תהי $\Gamma = \langle f_\gamma : B_\gamma \to B_\gamma \times \mathbb{Z} | \gamma \in S \rangle$ סדרת יהלום המתקבלת ממשפט 9.7.
נבנה את הסדרה באינדוקציה על $\alpha < \omega_1$. בסיס האינדוקציה : $C_0 := B_0 \oplus \mathbb{Z}$.
אם α סודר גבולי, יהי $C_\alpha =: \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$. נניח כי C_β הוגדרה לכל $\beta < \alpha$, ויהי $\alpha = \gamma + 1$:

- אם $\gamma \in S$ ו- f_γ הוא מונומורפיזם מפצל עבור פונקציית ההטלה $\pi : C_\gamma \to B_\gamma$, תהי $C_{\gamma+1}$ המתקבלת מטענה 5.6.2, כלומר חבורת-$(B_{\gamma+1}, \mathbb{Z})$ אשר לא ניתן להרחיב את $\lambda : B_\gamma \to C_\gamma$ למונומורפיזם מפצל עבור ההטלה $\pi : C_{\gamma+1} \to B_{\gamma+1}$.
(נשים לב כי אכן $B_{\gamma+1}/B_\gamma$ אינה חבורת-W שכן, $\gamma \in S$ גורר כי המנה הבת-מניה איננה חופשית, ולכן, ממסקנה 6.4, המנה אינה חבורת-W).
- אחרת. תהי $C_{\gamma+1}$ חבורת-$(B_{\gamma+1}, \mathbb{Z})$ כלשהי המרחיבה את C_γ. (ראו מסקנה 5.7).

לבסוף, תהי $C =: \bigcup_{n<\omega} C_n$, ואפימורפיזם ההטלה $\pi : C \to B$.
אם קיים מונומורפיזם מפצל $\lambda : B \to C$, הרי שיהלום מבטיח $\gamma \in S$ כך ש- $\lambda|_{B_\gamma} = f_\gamma$, ואזי, בדומה להוכחת 6.2, נקבל כי $\lambda|_{B_{\gamma+1}}$ אינו יכול להיות מונומורפיזם מפצל עבור $\pi|_{C_{\gamma+1}}$. סתירה ולכן B אינה חבורת-W.

<u>משפט 10.2</u> : נניח $V = L$. כל חבורת-W מעוצמה $\aleph_1$ מקיימת את תנאי Chase.
<u>הוכחה</u> : תהי A חבורת-W מעוצמה $\aleph_1$. אז ממסקנה 8.3, A היא $\aleph_1$-חופשית.
נניח בשלילה כי A איננה מקיימת תנאי Chase, לכן קיימת $A \geq B_0$ בת-מניה, כך שלכל C בת-מניה המכילה את B_0, A/C איננה $\aleph_1$-חופשית.
נבנה באינדוקציה סדרה עולה-ממש ורציפה של חבורות בנות-מניה $\langle B_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ כך שלכל $\alpha < \omega_1$ $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ איננה חופשית :
בסיס האינדוקציה : B_0 כבר הוגדרה.
שלב גבולי α : $B_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$.

שלב עוקב $\alpha+1$: B_α בת-מניה ומכילה את B_0, לכן A/B_α איננה $\aleph_1$-חופשית, כלומר קיימת חבורה בת-מניה G, $A\supset G\supset B_\alpha$ כך ש- G/B_α איננה חופשית. תהי $B_{\alpha+1}:=G$.

תהי B גבול הסדרה, אז ממשפט 10.1 (עבור $S=\omega_1$, קבוצת שבת) נקבל כי B איננה חבורת-W, אך B היא תת-חבורה של A וזאת כבר סתירה לטענה 5.2.

<u>משפט 10.3</u> : נניח A חבורה מעוצמה $\aleph_1$ המקיימת תנאי Chase. $\langle A_\alpha | \alpha<\omega_1\rangle$ סדרת חבורות כבמשפט 8.5, תהי E קבוצת הסודרים α כך ש- A_α אינה $\aleph_1$-טהורה, ו- S קבוצת הסודרים α כך ש- $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ אינה חופשית, <u>אז</u> $E=S$.

<u>הוכחה</u> : $E\supseteq S$: די באבחנה כי לכל $\alpha<\omega_1$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ היא חבורה בת-מניה.

$E\subseteq S$: יהי $\alpha\in\omega_1\setminus S$, ותהי B, $A\ge B\ge A_\alpha$ חבורה בת-מניה, נראה כי B/A_α חופשית.

יהי $\beta<\omega_1$ כך ש- $B\subseteq A_\beta$, מטענה 3.1, די להראות כי A_β/A_α חופשית.

נשים לב כי $\alpha<\beta$, ומתקיים
$$\frac{A_\beta/A_\alpha}{A_{\alpha+1}/A_\alpha}\cong A_\beta/A_{\alpha+1}$$
ואזי האגף השמאלי חופשי מתנאי Chase (משפט 8.5), והמחלק באגף הימני חופשי מבחירת α, ונקבל מטענה 4.1 כי A_β/A_α אכן חופשית.

<u>מסקנה 10.4 (Shelah)</u> : נניח $V=L$. כל חבורת-W מעוצמה $\aleph_1$ היא חופשית.

<u>הוכחה</u> : תהי A חבורת-W, ממשפט 10.2, A היא גבולה של סדרה עולה ורציפה $\langle A_\alpha | \alpha<\omega_1\rangle$ של חבורות חופשיות בנות-מניה. ממשפט 10.1 נובע כי S איננה קבוצת שבת, וממשפט 10.3 נסיק כי E איננה קבוצת שבת, ולכן ממשפט 8.7 נקבל כי A חופשית.

<u>הגדרה 10.5</u> : נניח κ מונה.
חבורה היא **κ-חופשית** אמ"מ כל תת-חבורה שלה מעוצמה $<\kappa$ היא חופשית.

<u>מסקנה 10.6</u> : נניח $V=L$. כל חבורת-W היא $\aleph_2$-חופשית.

<u>הוכחה</u> : 5.2 + 6.4 + 10.4.

<u>משפט 10.7 (Shelah)</u> : נניח $V=L$. כל חבורת-W היא חופשית.

<u>רעיון הוכחה</u> : מראים באינדוקציה על α כי חבורות-W מעוצמה $\aleph_\alpha$ הן חופשיות.

בסיס האינדוקציה : מסקנה 6.4.

הנחת אינדוקציה : אם B היא חבורת-W אז היא $\aleph_{\alpha+1}$-חופשית.

צעד האינדוקציה :

- נניח $\aleph_\alpha$ מונה סדיר. מכיוון ש- L מקיים עקרון יהלום לכל מונה סדיר, רעיון ההוכחה יעבוד.
- אם $\aleph_\alpha$ מונה חריג, ממשפט קומפקטיות של שלח מ-1975, $\aleph_\alpha$-חופשיות למונים חריגים גורר $\aleph_{\alpha+1}$-חופשיות.