1. מבוא קצר לתורת הקבוצות

<u>הגדרה 1.1</u> : קבוצה T היא **טרנזיטיבית** אמ"מ $x \in T \leftarrow x \subset T$.

<u>דוגמה 1.2</u> : $\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\}\}$ קבוצה טרנזיטיבית, בעוד $\{\phi,\{\phi,\{\phi\}\}\}$ איננה.

<u>הגדרה 1.3</u> : קבוצה סדורה קוית $\langle W,\leq \rangle$ היא **סדורה-היטב** אמ"מ לכל $A \subseteq W$ קיים איבר קטן ביותר לפי $\leq$.

<u>דוגמה 1.4</u> : $\langle \mathbb{N},\leq \rangle$ סדורה היטב, בעוד $\langle \mathbb{Z},\leq \rangle$ איננה.

<u>הגדרה 1.5</u> : קבוצה α היא **סודר** אמ"מ היא טרנזיטיבית וסדורה-היטב ע"י $\in$.

<u>הערה 1.6</u> : אם α,β סודרים ו- $\alpha \in \beta$, נהוג לסמן $\alpha < \beta$.

<u>טענה 1.7</u> : אם α הוא סודר, אז גם $\alpha \cup \{\alpha\} =: \alpha+1$ הוא סודר.

<u>הגדרה 1.8</u> : סודר α נקרא **סודר עוקב** אם קיים סודר β כך ש- $\alpha = \beta+1$, אחרת α נקרא **גבולי**.

<u>דוגמא 1.9</u> : $\{\phi,\{\phi\}\}$ הוא סודר עוקב, בעוד ϕ הוא סודר גבולי.

<u>הגדרה 1.10</u> : בניית **הסודרים הסופיים**. מגדירים : $\phi =: 0$, $\{0\} =: 1$, $\{0,1\} =: 2$ ו- $\{0,..,n\} =: n+1$.

<u>הגדרה 1.11</u> : קבוצת כל הסודרים הסופיים היא $\{n \,|\, n \in \mathbb{N}\} =: \omega$, הקבוצה האינדוקטיבית הראשונה.

<u>הערה 1.12</u> : לאורך כל המאמר נכתוב "יהי $n < \omega$ ", במקום "יהי n מספר טבעי".

<u>הגדרה 1.13</u> : הקבוצה $\mathbb{N}^+$ היא קבוצת הסודרים העוקבים הסופיים = $\{1,2,3,...\}$ (כלומר, $\omega \setminus \{0\}$).

<u>הגדרה 1.14</u> : ***On*** היא מחלקת כל הסודרים.

<u>הגדרה 1.15</u> : קבוצת כל הסודרים ברי-המניה היא $\{\alpha \in O_n \,|\, \exists f:\omega \to \alpha, \operatorname{Im} f = \alpha\} =: \omega_1$.

<u>משפט 1.16</u> : לכל קבוצה סדורה-היטב $\langle W,\leq \rangle$ קיים **טיפוס-סדר**, כלומר סודר יחיד $\alpha \in On$ ופונקציית שקילות שומרת-סדר $f: W \leftrightarrow \alpha$. מסמנים $Otp(\langle W,\leq \rangle) = \alpha$.

<u>הגדרה 1.17</u> : **אקסיומת הבחירה** : לכל קבוצה A קיים סודר $\alpha \in O_n$ כך ש- $A = \{x_\beta \,|\, \beta < \alpha\}$.

<u>הגדרה 1.18</u> : **מונה אינסופי** הוא סודר גבולי κ כך שלכל $\alpha \in \kappa$, לא קיימת פונקציה מ- α <u>על</u> κ .

<u>הגדרה 1.19</u> : $\aleph_0$ הוא המונה האינסופי הקטן ביותר, ואנו מזהים אותו עם ω . $\aleph_1$ הוא המונה העוקב ל- $\aleph_0$ ואנו מזהים אותו עם ω_1 .

<u>הגדרה 1.20</u> : עקרון **אינדוקציה טרנספיניטית** : נניח p טענה, α סודר.

אם 1. **בסיס האינדוקציה** מתקיים $p(0)$,

2. **שלב עוקב** מתקיים $p(\beta) \leftarrow p(\beta+1)$ (לכל סודר $\alpha > \beta$)

3. **שלב גבולי** מתקיים $\forall \beta < \delta . p(\beta) \leftarrow p(\delta)$ (לכל סודר גבולי $\alpha > \delta$)

<u>אז</u> $p(\alpha)$.

<u>טענה 1.21</u> : $\aleph_1$ הוא **מונה סדיר** : כלומר לכל A סדורה-היטב כך ש- $Otp(A) = \omega_1$ וכל $B \subset A$ כך ש- $Otp(B) < \omega_1$, <u>אז</u> B חסומה ב- A , כלומר קיים $x \in A$ הגדול מכל איברי B .

<u>הוכחה</u> : בשלילה, קיימת $B \subset A$ כך ש- $Otp(B) < \omega_1$, ו- B אינה חסומה ב- A .

תהי מניה של איברי $B = \{x_\beta \,|\, \beta < Otp(B)\}$, ונסמן $B_\beta = \{x \in A \,|\, x < x_\beta\}$. אז מההנחה על B נובע כי $A = \bigcup_{\beta < Otp(B)} B_\beta$, אך זאת בסתירה לעובדה כי איחוד בן-מניה של קבוצות-בנות מניה הוא בן-מניה.

<u>הגדרה 1.22</u> : תהי B קבוצה, ו- m מספר טבעי. $[B]^m$ היא הקבוצה $\{A \subseteq B \,|\, m = |A|\}$.