

0. הקדמה

בעיית Whitehead היא בעיה באלגברה, ועניינה מציאת תנאי מספיק להיותה של חבורה חופשית. בשנת 1974, במאמר של שהרן שלח מהאוניברסיטה העברית, מוכיח שלח כי בעית Whitehead אינה תלויה באקסיומות הרגילות של תורת הקבוצות (ZFC: Zermelo-Frankel+Axiom of Choice). התוצאה - שאלה טבעית באלגברה איננה תלויה - נחשבת מפתיעה, ומאמרו של שלח היה ראשון מסוגו.

ההוכחה מראה כי תחת הוספה של אחת משתי אקסיומות הידועות כעקביות עם ZFC (אקסיומת מרטיין, $MA(\aleph_1)$, או אקסיומת הקבוצות הבנויות, $V=L$), ניתן להכריע את בעיית Whitehead, לכאן או לכאן.

חוברת זו נכתבה במסגרת קורס בקוהומולוגיה של חבורות, 30 שנה לאחר מאמרו של שלח, לקראת הרצאה מסכמת, ומטרתה להציג את התוצאה באופן מפורט ו-Self Contained. השתדלתי שהחוברת תהיה נגישה להבנה לכל סטודנט למתמטיקה, עם זאת, החוברת מניחה ידע אלמנטרי בתורת החבורות, וידע בקוהומולוגיה של חבורות (פרק 5).

תוצאות מרכזיות המוכחות בחוברת :

טענה 4.4 : כל חבורה חופשית היא חבורת- W .

4.5 בעיית Whitehead : האם חבורת- W היא חבורה חופשית ?

משפט 6.2 : כל חבורת- W בת-מניה מקיימת את תנאי Pontryagin.

משפט 6.3 : כל חבורה בת-מניה המקיימת תנאי Pontryagin היא חופשית.

מסקנה 6.4 : חבורה בת-מניה היא חופשית אם"מ היא חבורת- W .

משפט 10.1 : נניח $V=L$. אם B חבורת- W ו- S אינה קבוצת שבת.

משפט 10.2 : נניח $V=L$. כל חבורת- W מעוצמה \aleph_1 מקיימת את תנאי Chase.

משפט 8.7 : נניח B חבורה מעוצמה \aleph_1 המקיימת תנאי Chase, ו- S אינה קבוצת שבת ו- B חופשית.

מסקנה 10.4 : נניח $V=L$. כל חבורת- W מעוצמה \aleph_1 היא חופשית.

משפט 12.1 : קיימת חבורה מעוצמה \aleph_1 המקיימת תנאי Chase שאינה חופשית.

משפט 12.2 : נניח $MA(\aleph_1)$. כל חבורה מעוצמה \aleph_1 המקיימת תנאי Chase, היא חבורת- W .

מסקנה 12.3 : נניח $MA(\aleph_1)$. קיימת חבורת- W מעוצמה \aleph_1 שאיננה חופשית.

ברצוני להודות לאנשים הבאים :

- פרופ' שמואל רוטט, אוני' ת"א, על הקורס "קוהומולוגיה של חבורות" אשר התקיים בסמסטר אביב 2004, במסגרתו נכתבה החוברת.
- פרופ' מוטי גיטיק, אוני' ת"א, על הקורס "תורת הקבוצות המתקדמת 2" אשר התקיים בסמסטר אביב 2003, במסגרתו נלמדו אקסיומת מרטיין ואקסיומת הקבוצות הבנויות.
- עמית שמרת, שותפי הקבוע ללימודים, על הידע הרב שלו ושיתוף הפעולה, אשר היו לעזר רב בהפקת חוברת זו.

אסף רינות,
ספטמבר 2004,
אוניברסיטת תל-אביב.
<http://www.tau.ac.il/~rinot>